UNIVERSITAS TERBUKA

03

TeOReMa

ALJABAR LINIER ELEMENTER I (MATA4112)

RUANG VEKTOR R^2 DAN R^3

UNIVERSITAS TERBUKA

PENGANTAR

PENGANTAR

Ruang vektor merupakan bahasan pokok dalam materi aljabar linear, untuk itu sangat penting untuk memahami konsepnya.

Untuk memahaminya, diperkenalkan ruang vektor yang sudah dikenali yaitu $\boldsymbol{R}^2$ dan $\boldsymbol{R}^3$.

PENGANTAR

Gambaran tentang $\boldsymbol{R}^2$ dan $\boldsymbol{R}^3$ paling umum dikenali pada materi fisika.

Dalam fisika ukuran seperti laju, luas daerah, panjang, massa, dan suhu hanya dinyatakan oleh sebuah bilangan real yang disebut sebagai skalar.

Ukuran lain seperti kecepatan, gaya, dan daya tidak hanya dinyatakan oleh bilangan namun juga memiliki arah, ukuran ini disebut sebagai vektor.

PENGANTAR

Akan dipelajari struktur matematis dari vektor-vektor pada fisika tersebut khususnya untuk $\boldsymbol{R}^2$ dan $\boldsymbol{R}^3$ sehingga berikutnya diperoleh bentuk yang digeneralisasi pada ruang vektor umum.

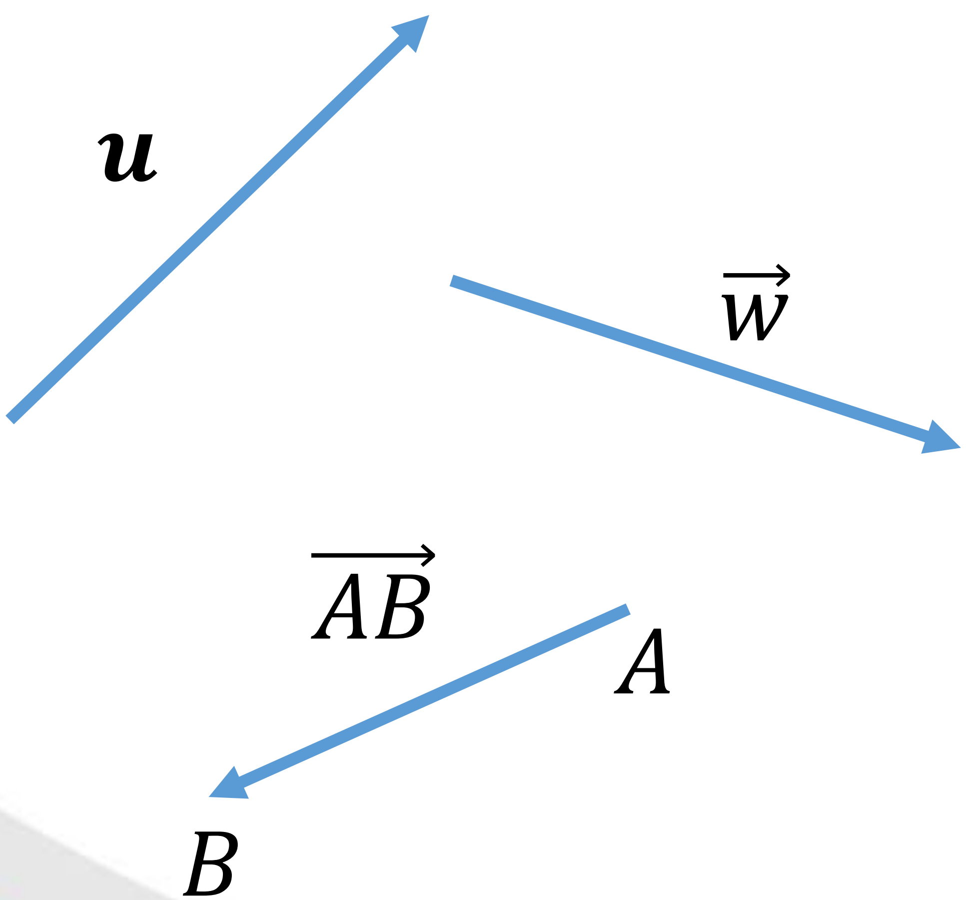
Pada akhirnya ruang vektor secara umum tidak lagi berbicara mengenai "arah" melainkan ruang yang memiliki syarat-syarat matematis seperti pada $\boldsymbol{R}^2$ dan $\boldsymbol{R}^3$.

Generalisasi ruang vektor memiliki banyak manfaat pada "kehidupan sehari-hari" seperti data statistika, input-output, grafik komputer, dsb.

VEKTOR DI $\boldsymbol{R}^2$ dan $\boldsymbol{R}^3$

VEKTOR DI R^2 DAN R^3

Pada $\boldsymbol{R}^2$ **dan** $\boldsymbol{R}^3$, vektor digambarkan sebagai sebuah segmen garis berarah, yaitu anak panak dengan titik awal (inisial) dan titik ujung (terminal).

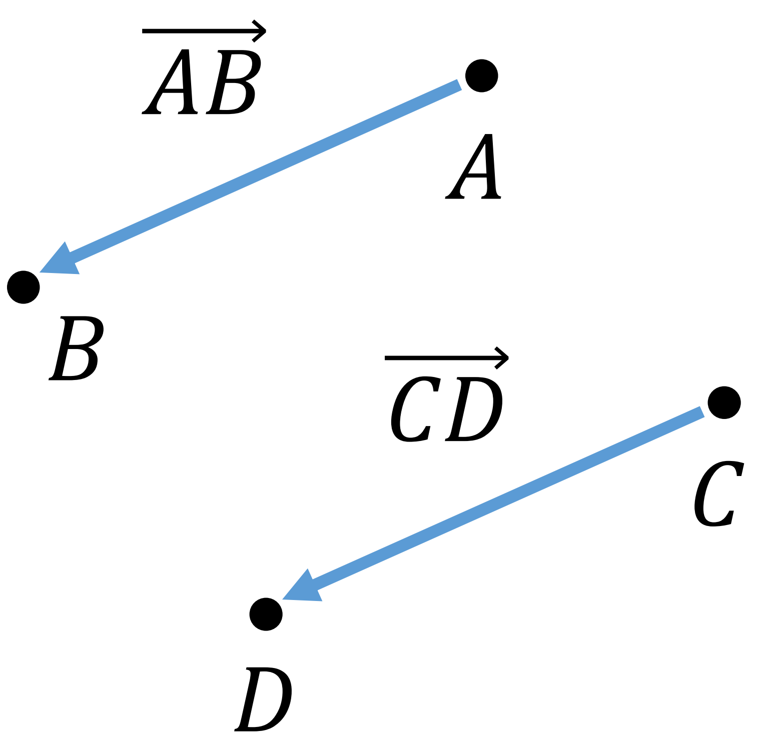


Notasi untuk vektor menggunakan huruf kecil yang ditebalkan atau bertopi panah seperti $\boldsymbol{u}$ atau $\vec{u}$.

Dapat juga dinotasikan berdasarkan titik-titik ujungnya seperti $\overrightarrow{AB}$

VEKTOR DI R^2 DAN R^3

Dua vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ **ekuivalen** atau $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ jika memiliki besar dan arah yang sama.



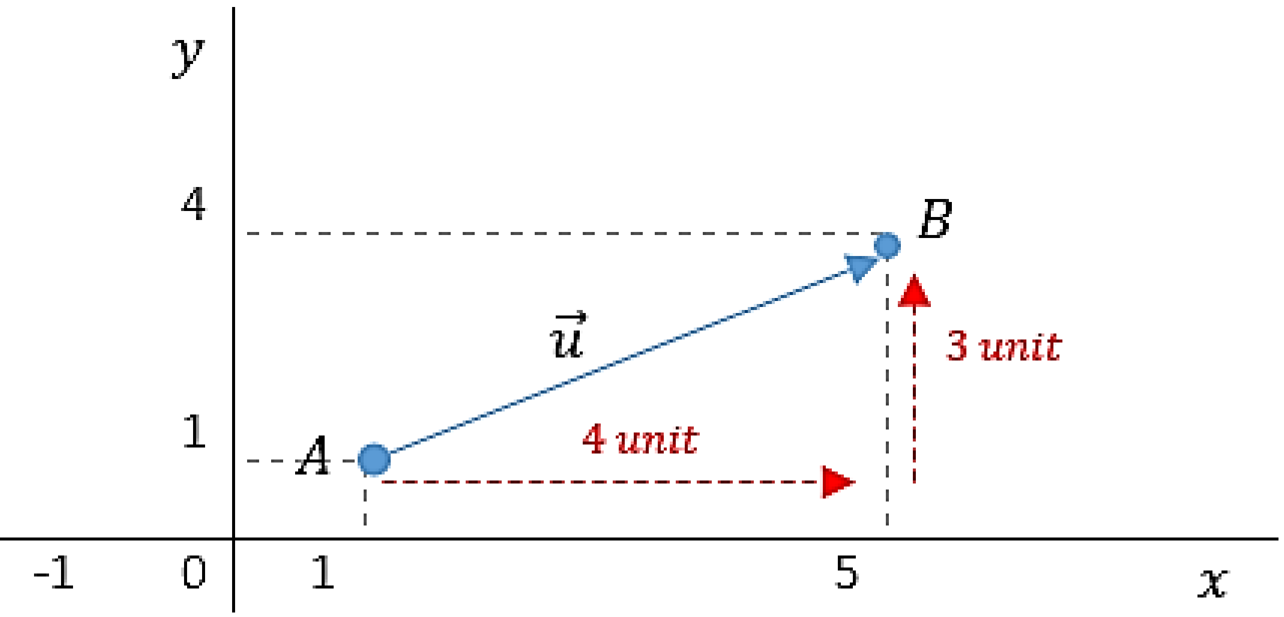
A, B, C, dan D terletak pada tempat yang berbeda-beda, namun vektor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, karena memiliki besar dan arah yang sama.

VEKTOR DI R^2 DAN R^3

Secara umum, vektor di $\boldsymbol{R}^2$ dituliskan sebagai

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \quad \text{atau} \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

dengan $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$.



Vektor $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{AB}$ memperlihatkan bahwa dari $A = (1{,}1)$ menuju $B = (5{,}4)$, memiliki arah 4 unit ke kanan dan 3 ke atas

atau dapat dituliskan

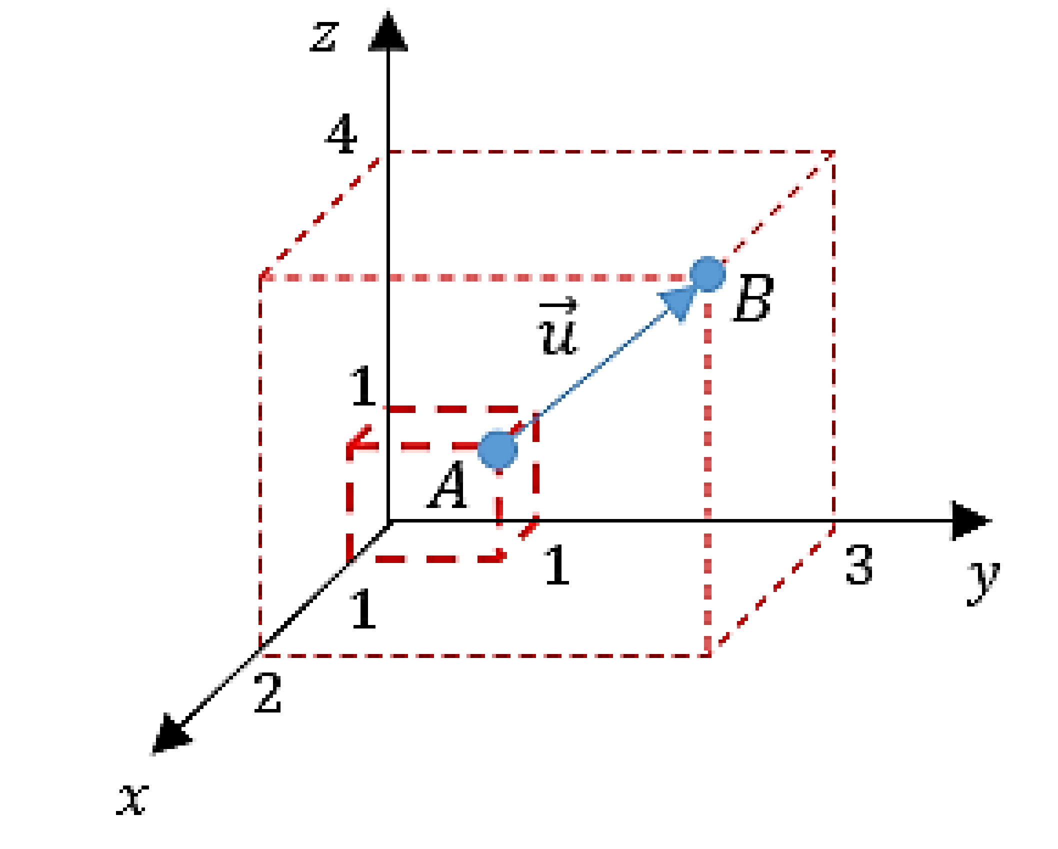
$$\boldsymbol{u} = (4{,}3) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

VEKTOR DI R^2 DAN R^3

Begitu pula pada $\boldsymbol{R}^3$ dituliskan sebagai

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{atau} \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

dengan $u_1, u_2, u_3 \in \boldsymbol{R}$.



VEKTOR DI R^2 DAN R^3

Aturan Penjumlahan Vektor

Pada $\boldsymbol{R^2}$, jika $\vec{u} = (u_1, u_2)$ dan $\vec{v} = (v_1, v_2)$ maka

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}$$

Pada $\boldsymbol{R^3}$, jika $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ maka

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}$$

VEKTOR DI R^2 DAN R^3

Aturan Perkalian Skalar

Pada $\boldsymbol{R}^2$, jika $\vec{u} = (u_1, u_2)$ dan $k \in \boldsymbol{R}$ maka

$$k\vec{u} = (ku_1, ku_2) = \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \end{bmatrix}$$

Pada $\boldsymbol{R}^3$, jika $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $k \in \boldsymbol{R}$ maka

$$k\vec{v} = (kv_1, kv_2, kv_3) = \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ ku_3 \end{bmatrix}$$

SIFAT-SIFAT ARITMETIKA VEKTOR DI $\boldsymbol{R}^2$ dan $\boldsymbol{R}^3$

SIFAT-SIFAT ARITMETIKA VEKTOR DI R^2 DAN R^3

Misalkan $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{w}$ merupakan vektor-vektor di $\boldsymbol{R^2}$, kemudian k dan l skalar, maka berlaku sifat:

1) **Tertutup penjumlahan** yaitu setiap $\vec{u}, \vec{v} \in \boldsymbol{R^2}$ berlaku

$$\vec{u} + \vec{v} \in \boldsymbol{R^2}$$

2) **Komutatif**

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

3) **Asosiatif**

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$$

SIFAT-SIFAT ARITMETIKA VEKTOR DI R^2 DAN R^3

4) **Memiliki elemen 0,** yaitu vektor $\vec{0} = (0,0)$ karena

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

5) **Setiap vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ memiliki elemen negatif,** yaitu vektor $-\vec{u} = (-u_1, -u_2)$ karena

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$$

SIFAT-SIFAT ARITMETIKA VEKTOR DI $\boldsymbol{R}^2$ DAN $\boldsymbol{R}^3$

6) **Tertutup perkalian skalar** yaitu setiap $\vec{u} \in \boldsymbol{R}^2$ dan $k \in \boldsymbol{R}$ berlaku $k\vec{u} \in \boldsymbol{R}^2$

7) **Asosiatif perkalian skalar**

$$k(l\vec{u}) = (kl)\vec{u}$$

8) **Distributif skalar terhadap jumlah vektor**

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

9) **Distributif vektor terhadap jumlah skalar**

$$(k + l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$$

10) **Untuk** $1 \in \boldsymbol{R}$ **Berlaku**

$$1\vec{u} = \vec{u}$$