

## VEKTOR PADA RUANG BERDIMENSI 2 DAN 3 (Bagian 2 dari 2)

**Pertemuan:** 11 dan 12

**Dosen:** Wahyu Hidayat, M.Si.

**Materi:**

4. Jarak Titik terhadap Garis di Ruang-2
5. Hasil Kali Silang
6. Garis dan Bidang pada Ruang-3

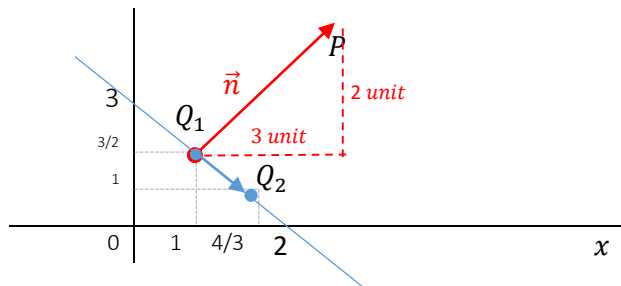
**Kompetensi Khusus:** Mahasiswa dapat melakukan operasi hitung menggunakan konsep Vektor pada ruang berdimensi 2 dan ruang berdimensi 3.

**Sumber:** Elementary Linear Algebra: Application Version 9<sup>th</sup> Edition, By: Howard Anton dan Chris Rorres

### 4. Jarak Titik terhadap Garis di Ruang-2

#### VEKTOR YANG TEGAK LURUS TERHADAP GARIS

Perhatikan gambar berikut



Dapat dilihat bahwa, titik  $Q_1(1, 3/2)$  dan  $Q_2(4/3, 1)$  terletak pada garis  $3x + 2y = 6$ , maka vektor  $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \left(\frac{4}{3} - 1, 1 - \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$  terletak pada garis tersebut. Kemudian misalkan terdapat vektor  $\vec{n} = (3, 2)$  yang memiliki inisial  $Q_1$ . Perhatikan bahwa

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{Q_1Q_2} = 3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 = 0$$

Dengan demikian, berdasarkan pada subbab sebelumnya maka  $\vec{n} \perp \overrightarrow{Q_1Q_2}$  dan karena  $\overrightarrow{Q_1Q_2}$  terletak pada garis  $3x + 2y = 6$ , dapat disimpulkan bahwa  $\vec{n}$  tegak lurus dengan garis tersebut.

Perhatikan fakta bahwa terdapat pola antar  $\vec{n} = (3, 2)$  dan garis  $3x + 2y = 6$ . Karena vektor menunjukkan arah, maka perubahan arah tentunya akan membuat tidak tegak lurus lagi, untuk itu vektor yang tegak lurus lainnya haruslah kelipatan dari  $\vec{n}$  yakni  $k\vec{n}$  untuk  $k$  skalar real. Untuk contoh di atas,  $\vec{n} = (3, 2)$  maka contoh vektor tegak lurus lainnya adalah  $(6, 4)$ ,  $(-3, -2)$ , dsb.

Secara umum vektor yang tegak lurus terhadap suatu garis akan memiliki pola yang sama seperti hasil di atas, sebagaimana teorema berikut.

### Vektor yang Tegak Lurus terhadap Garis

Misalkan diberikan persamaan garis  $ax + by + c = 0$ , maka vektor  $\vec{n} = (ka, kb)$  tegak lurus terhadap garis tersebut. Lebih khusus, vektor  $\vec{n} = (a, b)$  tegak lurus terhadap  $ax + by + c = 0$ .

#### Contoh 9

- 1) Misalkan diberikan sebuah persamaan garis  $y = \frac{2}{3}x - 5$ , akan dicari vektor-vektor yang tegak lurus dengan garis tersebut.

Perhatikan bahwa jika persamaan garis tersebut dikalikan 3 maka

$$3 \times (y) = 3 \times \left(\frac{2}{3}x - 5\right) \rightarrow 0 = 2x - 3y - 15$$

Berdasarkan teorema di atas, maka vektor yang tegak lurus dengan garis tersebut adalah

$$\vec{n} = (2, -3)$$

dan vektor lainnya adalah kelipatannya, yakni  $\vec{n}' = (2k, -3k)$  seperti  $(1, -\frac{3}{2})$ ,  $(-2, 3)$ , dsb.

- 2) Misalkan sebuah vektor  $(-8, 6)$  tegak lurus dengan sebuah persamaan garis  $ax + by + c = 0$  yang melewati titik  $(2, 3)$ . Akan dicari persamaan garis tersebut.

Berdasarkan teorema di atas, karena vektor  $\vec{n} = (-8, 6)$  tegak lurus dengan garis tersebut maka bentuk persamaannya adalah

$$-8x + 6y + c = 0$$

Kemudian karena melewati  $(2, 3)$  maka

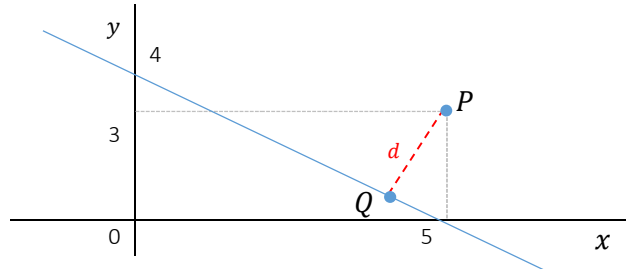
$$\begin{aligned} -8(2) + 6(3) + c &= 0 \\ -16 + 18 + c &= 0 \\ c &= -2 \end{aligned}$$

Dengan demikian, persamaan garis yang dimaksud adalah

$$\begin{aligned} -8x + 6y - 2 &= 0 \rightarrow -4x + 3y - 1 = 0 \\ y &= \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

## JARAK TITIK TERHADAP GARIS

Terdapat sebuah titik  $P(5,3)$  dan garis  $4x + 5y - 20 = 0$  seperti pada gambar berikut.



Dapat dilihat bahwa jarak dari titik  $P$  menuju garis tersebut dapat diwakili oleh garis merah, yakni sebesar  $d$  menuju satu titik di garis yaitu  $Q(x_2, y_2)$ . Jarak ini tentunya harus secara tegak lurus dengan garis (sebab jika tidak maka akan semakin jauh), yakni  $\overline{PQ} \perp 4x + 5y - 20 = 0$ . Artinya, berdasarkan Teorema di atas maka  $\overline{PQ} = (4k, 5k) = k\vec{n}$  dengan  $\vec{n} = (4,5)$ .

Sekarang misalkan  $Q = (x, y)$ , maka  $\overline{PQ} = Q - P = (x - 5, y - 3)$ . Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= k\vec{n} \\ \overline{PQ} \cdot \vec{n} &= k\vec{n} \cdot \vec{n} \\ (x - 5, y - 3) \cdot (4, 5) &= k(4, 5) \cdot (4, 5) \\ 4x - 4(5) + 5y - 5(3) &= k(4^2 + 5^5) \\ 4x + 5y - 20 - (4(5) + 5(3) - 20) &= k(4^2 + 5^5) \\ k &= -\frac{4(5) + 5(3) - 20}{(4^2 + 5^5)}\end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}d &= \|\overline{PQ}\| = \|k\vec{n}\| \\ &= |k|\|\vec{n}\| \\ &= \left| \frac{4(5) + 5(3) - 20}{(4^2 + 5^5)} \right| \sqrt{4^2 + 5^5} \\ d &= \left| \frac{4(5) + 5(3) - 20}{\sqrt{4^2 + 5^5}} \right| \\ &= \frac{15}{\sqrt{41}} \approx 2.34\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa terdapat pola antara  $P = (5,3)$ , garis  $4x + 5y - 20 = 0$  dan rumus jarak  $d$  di atas.

Secara umum, jarak antara sebuah titik dengan sebuah garis akan memiliki pola yang sama seperti hasil di atas, sebagaimana teorema berikut.

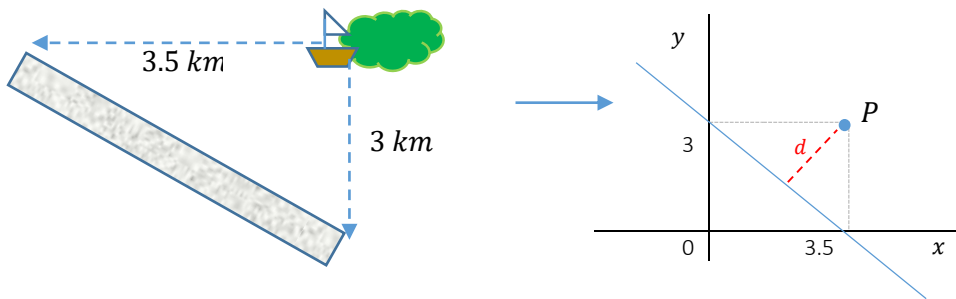
### Jarak Titik terhadap Garis

Misalkan diberikan persamaan garis  $ax + by + c = 0$ , maka jarak dari titik  $P = (x_0, y_0)$  terhadap garis tersebut adalah

$$d = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

### Contoh 10

Sebuah kapal akan bergerak dari suatu pulau menuju pelabuhan  $B$  yang memiliki garis pantai yang panjang. Sebelumnya kapal tersebut pernah melakukan perjalanan “secara horizontal” sejauh 3.5 km dan pernah pula “secara vertikal” sejauh 3 km, seperti pada gambar di bawah ini. Akan ditentukan jarak agar keberangkatan dari pulau tersebut ke pelabuhan paling dekat.



Dapat dilihat bahwa titik keberangkatan pada suatu pulau dimisalkan  $P(x_0, y_0) = (3.5, 3)$  dan garis pelabuhan dapat diibaratkan sebuah garis  $3x + 3.5y - 10.5 = 0$ . Karena jarak terdekat merupakan garis tegak lurus dari  $P$  ke garis (garis merah), maka berdasarkan Teorema Jarak Titik terhadap Garis di atas

$$\begin{aligned} d &= \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \left| \frac{3(3.5) + 3.5(3) - 10.5}{\sqrt{3^2 + 3.5^2}} \right| \\ &= \left| \frac{10.5}{\sqrt{21.25}} \right| \approx 2.28 \text{ km} \end{aligned}$$

Jadi, maka jarak perjalanan terdekat dari pulau menuju pelabuhan haruslah 2.28 km.

---

## 5. Hasil Kali Silang (*Cross Product*)

---

### PENGANTAR

---

Ingat kembali mengenai hasil kali titik atau *dot product* pada subbab sebelumnya, misalnya pada ruang-2, untuk setiap  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  dan  $\vec{v} = (v_1, v_2)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

Bentuk “perkalian” antar vektor ini tidak menghasilkan vektor lagi, melainkan sebuah bilangan real atau skalar. Baik pada ruang-2 maupun ruang-3, kegunaan utama hasil kali titik adalah untuk menentukan sudut antara dua buah vektor, yakni

$$\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Kegunaan lainnya adalah untuk menentukan proyeksi orthogonal dan juga menghasilkan rumus vektor yang tegak lurus dengan garis dan jarak titik terhadap suatu garis, seperti pada pembahasan di atas.

Pada pembahasan kali ini, akan dibahas mengenai bentuk “perkalian” lainnya. Berbeda dengan sebelumnya yang menghasilkan bilangan real atau skalar, perkalian ini akan menghasilkan vektor kembali, lebih tepatnya vektor yang tegak lurus atau orthogonal terhadap kedua vektor yang dikalikan. Untuk itu, hasil kali silang tidak mungkin ada pada ruang-2, ruang yang mungkin untuk didefinisikan adalah ruang-3 (secara umum, hasil kali silang antar dua vektor hanya mungkin didefinisikan pada ruang-3 dan ruang-7, perlu pendalaman lebih lanjut untuk memahami alasannya).

Penerapan dari hasil kali silang banyak digunakan dalam berbagai hal yang berkaitan dengan ruang 3 dimensi. Pada fisika aplikasinya digunakan pada gaya Lorentz, penentuan besar momentum gerak melingkar dan torsi, dan sebagainya, dapat pula digunakan untuk grafik 3D pada komputer seperti mendefinisikan pantulan cahaya, yang paling sederhana dapat digunakan untuk menentukan luas daerah segitiga yang ditentukan oleh 3 buah titik koordinat.

Untuk memahami mengenai konsep hasil kali silang, berikut misalkan diberikan dua vektor pada ruang-3,  $\vec{u} = (2,2,0)$  dan  $\vec{v} = (0,3,3)$ . Definisikan vektor  $\vec{w}$  yang dihasilkan oleh proses berikut

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} &= \hat{i} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 6\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k} \end{aligned}$$

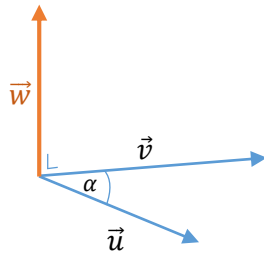
Jadi,  $\vec{w} = (6, -6, 6)$

Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = 6(2) + (-6)(2) + 6(0) = 0, \text{ dan}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 6(0) + (-6)(3) + 6(3) = 0$$

artinya, vektor  $\vec{w}$  orthogonal terhadap vektor  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$ . Berikut adalah ilustrasinya.



Jika dilihat dari proses mendapatkan vektor  $\vec{w}$  di atas, yakni menggunakan determinan dari suatu matriks  $3 \times 3$  yang tersusun atas basis sumbu ( $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ , dan  $\hat{k}$ ), vektor  $\vec{u}$ , dan vektor  $\vec{v}$ . Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa perhitungan determinan matriks ukuran  $3 \times 3$  baik menggunakan ekspansi kofaktor maupun Sarrus berkaitan dengan perkalian yang “bersilangan” (*crossed*).

Selain itu, terdapat fakta bahwa vektor yang orthogonal akan “muncul” (anggap vektor 0 artinya tidak muncul) jika dua buah vektor “bersilangan”, sebab jika tidak bersilangan artinya dua buah vektor tersebut sejajar sehingga arahnya sama atau berlawanan (sudutnya 0 atau  $\pi$ ), akibatnya  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  dan  $\vec{v} = (ku_1, ku_2, ku_3)$  untuk suatu skalar  $k$ , dan vektor  $\vec{w}$  adalah

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ ku_1 & ku_2 & ku_3 \end{vmatrix} &= \hat{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ ku_2 & ku_3 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ ku_1 & ku_3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ ku_1 & ku_2 \end{vmatrix} \\ &= (ku_2u_3 - ku_2u_3)\hat{i} - (ku_1u_3 - ku_1u_3)\hat{j} + (ku_1u_2 - ku_1u_2)\hat{k} \\ &= 0\hat{i} - 0\hat{j} + 0\hat{k} \\ &= (0,0,0) \end{aligned}$$

Jika digambarkan



Dapat dilihat bahwa jika dua buah vektor tidak bersilangan, maka vektor yang orthogonalnya tidak “muncul” atau  $\vec{w} = \vec{0}$ .

## DEFINISI HASIL KALI SILANG

Berdasarkan dua buah vektor yang bersilangan membentuk vektor  $\vec{w}$  yang ortogonal dengan dua vektor tersebut menggunakan aturan perkalian yang bersilangan, hal tersebut memberikan motivasi terhadap definisi sebuah perkalian antara dua buah vektor yang disebut sebagai hasil kali silang, seperti pada definisi berikut.

### Definisi dan Sifat Ortogonal Hasil Kali Silang

Misalkan  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  dan  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vektor di ruang-3. Hasil kali silang atau *cross product* dari  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$ , dinotasikan  $\vec{u} \times \vec{v}$ , adalah

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2, -u_1v_3 + u_3v_1, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Lebih lanjut,  $\vec{u} \times \vec{v}$  merupakan sebuah vektor baru yang orthogonal terhadap  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$ , yakni

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{dan} \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$$

Dari sifat di orthogonal di atas, dapat dilihat bahwa terdapat hubungan antara hasil kali silang dengan hasil kali titik. Untuk contoh hubungan lainnya, perhatikan kembali vektor  $\vec{u} = (2,2,0)$ ,  $\vec{v} = (0,3,3)$ , dan  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} = (6, -6, 6)$ . Perhatikan bahwa

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 2^2 + 2^2 + 0 = 8;$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2 = 0^2 + 3^2 + 3^2 = 18;$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 3 = 6; \quad \text{dan}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = 6^2 + (-6)^2 + 6^2 = 108$$

Selanjutnya, perhatikan pula bahwa

$$\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = 8 \cdot 18 - 6^2 = 108 = \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2$$

Secara umum, hubungan antara hasil kali dalam dan hasil kali silang tersebut akan berlaku untuk sebarang vektor, serta terdapat hubungan lainnya seperti pada teorema berikut.

### Teorema Hubungan Hasil Kali Dalam dan Hasil Kali Silang

Misalkan  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  sebarang vektor di ruang-3, maka berlaku hubungan berikut.

$$1) \quad \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

$$2) \quad \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$$

$$3) \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$$

### Contoh 11

1. Misalkan  $\vec{u} = (1,2,3)$  dan  $\vec{v} = (3,2,1)$ , maka

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (2 \cdot 1 - 3 \cdot 2)\hat{i} - (1 \cdot 1 - 3 \cdot 3)\hat{j} + (1 \cdot 2 - 2 \cdot 3)\hat{k} \\ &= -4\hat{i} + 8\hat{j} - 4\hat{k} \\ &= (-4, 8, -4)\end{aligned}$$

Berdasarkan sifatnya maka pastilah  $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$  dan  $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$ , perhatikan bahwa

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = -4 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 = 0 \text{ dan}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = -4 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 = 0.$$

2. Torsi  $\vec{\tau}$  (*torque*) dari sebuah mesin ditentukan oleh hasil kali silang antara lengan gaya  $\vec{r}$  dengan vektor gayanya  $\vec{F}$ , yakni  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Jika vektor lengannya adalah  $\vec{r} = (4, 1, -2)$  dan vektor gayanya adalah  $\vec{F} = (5, 2, 4)$ . Jika besarnya torsi ditentukan oleh normanya, maka berdasarkan Teorema nomor 1) di atas, besar torsi tersebut adalah

$$\begin{aligned}\|\vec{\tau}\|^2 &= \|\vec{r} \times \vec{F}\|^2 = \|\vec{r}\|^2 \|\vec{F}\|^2 - (\vec{r} \cdot \vec{F})^2 \\ &= (4^2 + 1^2 + (-2)^2)(5^2 + 2^2 + 4^2) - (4 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 4)^2 \\ &= 21 \cdot 45 - (14)^2 \\ &= 749 \\ \|\vec{\tau}\| &= \sqrt{749} \approx 27.37\end{aligned}$$

## SIFAT-SIFAT HASIL KALI SILANG

Sebelumnya telah dijelaskan mengenai sifat hasil kali silang berupa hubungannya dengan hasil kali titik. Seperti halnya hasil kali titik yang memiliki beberapa sifat utama, berikut akan dibahas mengenai sifat utama hasil kali silang.

Sebelumnya, perhatikan ilustrasi berikut. Misalkan  $\vec{u} = (2,2,0)$ ,  $\vec{v} = (0,3,3)$  vektor di ruang-3. Telah diperoleh sebelumnya bahwa  $\vec{u} \times \vec{v} = (6, -6, 6)$ , namun perhatikan bila dibalik urutannya

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -6\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}\end{aligned}$$

maka  $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$ , berbeda dengan  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ . Jadi, hasil kali silang tidak bersifat komutatif. Di sisi lain,

$$\begin{aligned}(-\vec{u} \times \vec{v}) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -6\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}\end{aligned}$$

Begitu pula dengan  $\vec{u} \times (-\vec{v})$ , dengan demikian  $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times (-\vec{v})$ . Ini sekaligus menunjukkan bahwa penukaran posisi hasil kali silang merupakan perkalian silang antara satu vektor dengan vektor lain yang berbalik arah.

### Sifat-Sifat Utama Hasil Kali Silang

Misalkan  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  sebarang vektor di ruang-3, dan  $k$  sebarang skalar, maka berlaku

- 1)  $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
- 2)  $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$
- 3)  $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$
- 4)  $k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$
- 5)  $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u}$
- 6)  $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

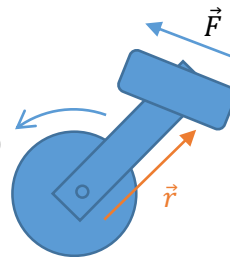
## Contoh 12

Misalkan  $\vec{r}$  merupakan lengan gaya atau panjang pedal,  $\vec{F}$  gaya yang diberikan pada pedal, dan  $\vec{\tau}$  torsi yang dihasilkan di mana jika positif maka roda bergerak maju atau melawan arah jarum jam (kaidah tangan kanan).

Telah disebutkan pada Contoh 11 bahwa  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Berikut ilustrasi perbedaan antara hasil  $\vec{r} \times \vec{F}$  dengan  $\vec{F} \times \vec{r}$

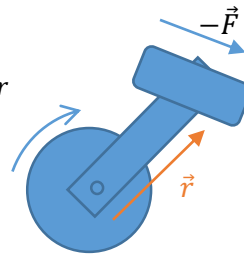
$$\text{Kasus } \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$  positif  
→ roda bergerak maju  
(melawan arah jarum jam)



$$\text{Kasus } \vec{F} \times \vec{r} = \vec{r} \times (-\vec{F}) = -\vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$  negatif  
→ roda bergerak mundur  
(searah jarum jam)



## NORMA HASIL KALI SILANG MENGGUNAKAN SUDUT

Misalkan  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  vektor di ruang-3 yang membentuk sudut  $\alpha$ . Perhatikan kembali Teorema Hubungan Hasil Kali Silang dan Hasil Kali Dalam nomor 1), yaitu

$$\begin{aligned}\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2 \alpha \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

Dengan demikian berlaku

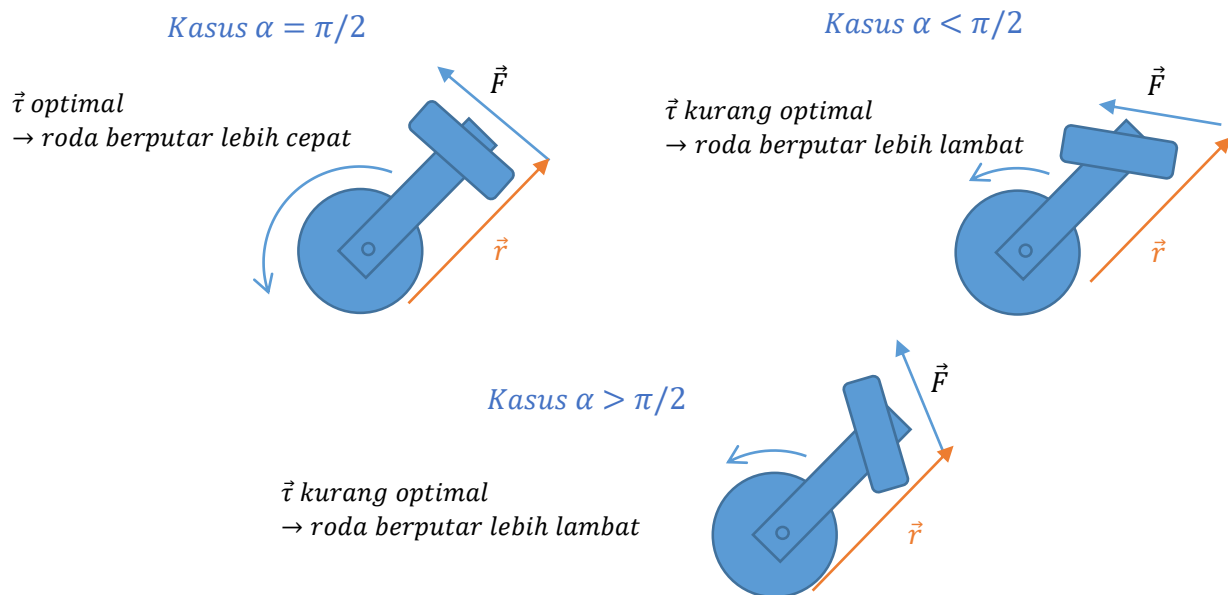
$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \alpha$$

Rumus tersebut sangat berguna dalam berbagai aplikasi. Pada torsi, karena  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ , maka

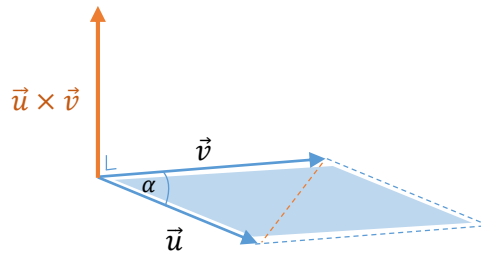
$$\|\vec{\tau}\| = \|\vec{r} \times \vec{F}\| = \|\vec{r}\| \|\vec{F}\| \sin \alpha$$

Dengan demikian selain dengan memperpanjang lengan gaya  $\vec{r}$  dan juga memperbesar gaya  $\vec{F}$  untuk mendapatkan torsi yang besar sehingga perputaran rotasi semakin cepat, adanya rumus  $\sin \alpha$  memberikan syarat utama bahwa agar torsinya semaksimal mungkin, maka sudut yang harus diberikan antara lengan  $\vec{r}$  dan gaya  $\vec{F}$  haruslah  $\alpha = 90^\circ$  atau  $\pi/2$  sebab nilai terbesar  $\sin \alpha$  adalah 1, yaitu  $\sin 90^\circ = 1$ .

Ini menunjukkan bahwa gaya harus tegak lurus terhadap lengan gaya yang akan didorong, berikut ilustrasinya.



Aplikasi lain dari rumus di atas adalah untuk menentukan luas daerah yang dibentuk oleh dua buah vektor. Perhatikan gambar berikut.



Perhatikan daerah diarsir dengan sisinya adalah vektor  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  dengan sudut  $\alpha$ . Ingat kembali mengenai aturan sinus untuk luas segitiga, karena  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , dan garis putus jingga merupakan segitiga maka luasnya adalah

$$L_{\Delta} = \frac{1}{2} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \alpha$$

Dengan demikian Luas Jajaran Genjang (*Parallelogram*) yang diarsir adalah

$$L = 2L_{\Delta} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \alpha$$

Akibatnya, berdasarkan rumus  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$  di atas maka

$$L = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

Sebagaimana teorema berikut.

### Luas Jajaran Genjang

Misalkan  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  sebarang vektor di ruang-3 maka luas jajaran genjang pada ruang-3 dengan sisi yang ditentukan oleh  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  adalah

$$L = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

### Contoh 13

Misalkan sebuah jajar genjang memiliki titik-titik sudut  $A(2,2,0)$ ,  $B(0,4,3)$ ,  $C(3,6,1)$ , dan  $D(-1,0,2)$ . Maka luas jajar genjang tersebut adalah  $L = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\|$  di mana

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 10\hat{i} - 5\hat{j} + 10\hat{k}$$

$$\text{Jadi, } L = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \sqrt{10^2 + (-5)^2 + 10^2} = \sqrt{225} = 15.$$

## DETERMINAN MATRIKS DARI VEKTOR BARIS

Pada ruang-2, hasil kali silang tidak dapat didefinisikan sebab hasilnya harus tegak lurus terhadap vektor-vektor yang dikalissilangkan sehingga membutuhkan dimensi yang ke-3. Namun demikian, sudut pandang vektor di ruang-2 dapat “diubah” menjadi vektor pada dimensi-3. Misalnya, pergerakan mobil pada bidang datar merupakan vektor pada ruang-2, yaitu hanyalah bisa ke arah kanan-kiri, depan-belakang, atau kombinasinya, tidak bisa “terbang” ke atas atau ke bawah. Meskipun begitu tetap saja mobil berada pada ruang-3, hanya tidak dapat bergerak ke atas atau ke bawah saja, atau nilai pergerakan atas-bawahnya adalah 0.

Berdasarkan ilustrasi gerakan mobil tersebut, sekarang misalkan  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  dan  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  vektor di ruang-2. Jika dipandang sebagai vektor di ruang-3 nilai pada sumbu-z nya adalah 0, yaitu  $\vec{u} = (u_1, u_2, 0)$  dan  $\vec{v} = (v_1, v_2, 0)$ . Dengan demikian dapat dibuat hasil kali silangnya, yakni

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} u_1 & 0 \\ v_1 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} u_2 & 0 \\ v_2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= 0\hat{i} - 0\hat{j} - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \hat{k} = (0, 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix})\end{aligned}$$

Perhatikan pula bahwa

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2} = \left| \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} \vec{u}^t \\ \vec{v}^t \end{vmatrix} \right|$$

Ingat fakta bahwa  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$  merupakan luas jajar genjang, berarti luas jajar genjang pada ruang-2 ditentukan oleh mutlak determinan dari vektor  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$ , seperti pada teorema berikut.

### Luas Jajaran Genjang pada Ruang-2

Misalkan  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  dan  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  sebarang vektor di ruang-2 maka luas jajaran genjang dengan sisi yang ditentukan oleh  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  adalah

$$L = \left| \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right|$$

### Contoh 14

Misalkan sebuah jajar genjang memiliki titik-titik sudut  $A(1,2)$ ,  $B(2,3)$ ,  $C(4,4)$ , dan  $D(3,5)$ . Maka luas jajar genjang tersebut ditentukan oleh vektor  $\overline{AB} = (1,1)$  dan  $\overline{AD} = (2,3)$ , yakni

$$L = \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right| = 3 - 2 = 1.$$

Sekarang misalkan  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , dan  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ . Perhatikan bahwa

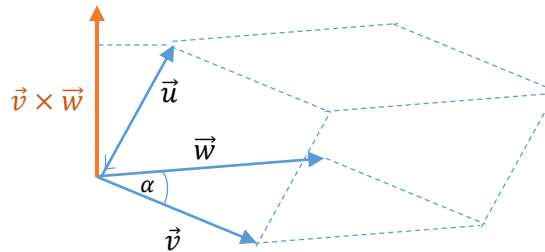
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_2 w_3 - v_3 w_2, -v_1 w_3 + v_3 w_1, v_1 w_2 - v_2 w_1) \\ &= u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) - u_2(v_1 w_3 - v_3 w_1) + u_3(v_1 w_2 - v_2 w_1) \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Dengan demikian

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Perkalian ini disebut sebagai *hasil kali tripel skalar*.

Perhatikan gambar berikut.



Vektor  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , dan  $\vec{w}$  membentuk *parallelepiped* atau “kubus” dengan setiap sisinya jajar genjang. Volume parallelepiped tersebut adalah luas alas jajar genjang  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  dikalikan tingginya yaitu panjang proyeksi  $\vec{u}$  sepanjang  $\vec{v} \times \vec{w}$ , yakni

$$\begin{aligned}V &= L \text{ jajar genjang} \cdot \|\text{proj}_{\vec{v} \times \vec{w}}(\vec{u})\| \\ &= \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cdot \frac{|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|}{\|\vec{v} \times \vec{w}\|} \\ &= |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|\end{aligned}$$

Dengan demikian, volume parallelepiped merupakan mutlak dari hasil kali tripel skalar di atas, sebagaimana teorema berikut.

#### Volume Parallelepiped

Misalkan  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , dan  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  sebarang vektor di ruang-3 maka volume parallelepiped dengan sisi yang ditentukan oleh  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , dan  $\vec{w}$  adalah

$$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = \left| \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \right|$$

### Contoh 15

Misalkan sebuah paralelepiped ditentukan oleh vektor-vektor  $\vec{u} = (2, -6, 2)$ ,  $\vec{v} = (0, 4, -2)$  dan  $\vec{w} = (2, 2, 4)$ , maka volume paralelepiped yang terbentuk adalah

$$\begin{aligned}V &= \begin{vmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (-6) \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= |2 \cdot 20 + 6 \cdot 4 + 2 \cdot (-8)| \\ &= 48\end{aligned}$$

Patut dicatat bahwa, bagaimanapun letak vektor baris pada determinan matriks di atas tidak akan berpengaruh terhadap hasil volumenya. Hal ini disebabkan adanya nilai mutlak yang akan selalu membuat nilai volumenya positif. Sebagai contoh misalkan dilakukan penukaran letak  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  maka volume paralelepiped yang terbentuk adalah

$$\begin{aligned}V &= \begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & -6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 0 \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= |0 \cdot (-28) - 4 \cdot 4 - 2 \cdot (16)| \\ &= |-48| \\ &= 48\end{aligned}$$

---

## 6. Garis dan Bidang pada Ruang-3

---

### VEKTOR YANG TEGAK LURUS TERHADAP BIDANG

---

Ingat kembali mengenai vektor yang tegak lurus terhadap garis pada ruang-2, yakni jika terdapat garis  $ax + by + c = 0$  maka vektor yang tegak lurus atau orthogonal (vektor normal) terhadap garis tersebut adalah  $\vec{n} = (a, b)$  dan kelipatannya.

Hasil ini dapat digeneralisasi pada ruang-3, namun untuk bukan berupa garis melainkan bidang. Hal ini dikarenakan, untuk vektor normal garis arahnya tidaklah tetap secara kelipatan, melainkan mengitari bidang yang sejajar vektor tersebut. Pada akhirnya garis tersebut yang akan tegak lurus terhadap bidang yang terbentuk. Konsep yang dipakai akhirnya vektor yang tegak lurus terhadap bidang atau vektor normal dari bidang.

Berikut teorema mengenai vektor normal dari bidang tersebut.

#### Vektor Normal dari Bidang

Misalkan diberikan persamaan bidang  $ax + by + cz + d = 0$ , maka vektor  $\vec{n} = (ka, kb, kc)$  tegak lurus terhadap bidang tersebut. Lebih khusus, vektor  $\vec{n} = (a, b, c)$  merupakan vektor normal dari  $ax + by + cz + d = 0$ .

#### Contoh 16

- 1) Misalkan diberikan sebuah persamaan bidang  $z = \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y + 10$ , akan dicari vektor-vektor normal dari bidang tersebut.

Perhatikan bahwa jika persamaan bidang tersebut dikalikan 12 maka

$$12 \times (z) = 12 \times \left( \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y + 10 \right) \rightarrow 0 = 8x - 9y - 12z - 15$$

Berdasarkan teorema di atas, maka vektor normal dengan bidang tersebut adalah

$$\vec{n} = (8, -9, -12)$$

dan vektor lainnya adalah kelipatannya, yakni  $\vec{n}' = (8k, -9k, -12k)$  seperti  $(-16, 18, 24)$ .

- 2) Akan dicari bidang yang melewati titik  $A(1,2,-1)$ ,  $B(2,3,1)$ , dan  $C(3,-1,2)$   
 Menggunakan substitusi titik-titik tersebut pada persamaan bidang

$$ax + by + cz + d = 0$$

akan memakan waktu yang cukup lama (menggunakan metode eliminasi Gauss atau lainnya).

Sekarang misalkan  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,1,2)$  dan  $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (2,-3,3)$ , maka dua vektor tersebut terletak pada bidang tersebut. Dengan demikian vektor normal merupakan hasil kali silang

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 9\hat{i} - (-1)\hat{j} + (-5)\hat{k} \\ \vec{n} &= (9,1,-5)\end{aligned}$$

merupakan normal dari bidang tersebut. Jadi, berdasarkan teorema di atas bidangnya adalah

$$9x + y - 5z + c = 0$$

karena melewati  $A(1,2,-1)$ , maka

$$\begin{aligned}9(1) + (2) - 5(-1) + c &= 0 \\ 9 + 2 + 5 + c &= 0 \\ c &= -16\end{aligned}$$

sehingga persamaan bidangnya

$$9x + y - 5z - 16 = 0$$

Dari kasus nomor 2) di atas perhatikan bahwa jika dimisalkan  $\vec{n} = (9,1,-5)$ ,  $\vec{r} = (x,y,z)$ , dan vektor posisi  $\vec{r}_0 = A = (1,2,-1)$ , maka

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}(9,1,-5) \cdot (x-1, y-2, z+1) &= 0 \\ 9(x-1) + 1(y-2) - 5(z+1) &= 0 \\ 9x + y - 5z - 16 &= 0\end{aligned}$$

membentuk persamaan bidang pula. Secara umum, seperti teorema berikut.

### Vektor Pembentuk Persamaan Bidang

Misalkan  $A$  merupakan titik yang dilewati oleh sebuah bidang yang memiliki vektor normal  $\vec{n}$ , maka persamaan bidang tersebut merupakan dibentuk oleh hasil kali titik berikut

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

di mana  $\vec{r} = (x,y,z)$  dan  $\vec{r}_0 = A$  vektor posisi dari  $A$ .

## JARAK TITIK TERHADAP BIDANG

Pada subbab di atas, telah diperlihatkan bahwa konsep mengenai vektor yang tegak lurus terhadap garis pada ruang-2 dapat digeneralisasi untuk konsep vektor yang tegak lurus terhadap bidang pada ruang-3. Hal ini akan berlaku pula untuk jarak titik terhadap garis akan tergeneralisasi untuk konsep jarak titik terhadap bidang pada ruang-3, seperti pada teorema berikut.

### Jarak Titik terhadap Bidang

Misalkan diberikan persamaan bidang  $ax + by + cz + d = 0$ , maka jarak titik  $P = (x_0, y_0, z_0)$  terhadap bidang tersebut adalah

$$d = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

### Contoh 17

- 1) Akan dicari jarak dari koordinat titik  $(1, -4, 3)$  ke bidang  $2x + 3y + 6z = -1$ .

Karena  $2x + 3y + 6z + 1 = 0$ , maka berdasarkan teorema jarak titik terhadap bidang di atas

$$\begin{aligned} d &= \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| = \left| \frac{2(1) + 3(-4) + 6(3) + 1}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} \right| \\ &= \left| \frac{9}{\sqrt{49}} \right| = \frac{9}{7} \approx 1.29 \end{aligned}$$

- 2) Misalkan diberikan dua buah bidang yang sejajar pada ruang-3, yakni

$$x + 2y - 2z = 3 \quad \text{dan} \quad 2x + 4y - 4z = 7$$

Akan ditentukan jarak dua bidang tersebut.

Berdasarkan teorema vektor normal pada ruang dari bidang, maka vektor normal untuk bidang pertama adalah  $\vec{n}_1 = (1, 2, -2)$  dan sedangkan untuk bidang adalah  $\vec{n}_2 = (2, 4, -4)$ .

Untuk  $y = z = 0$  maka  $x + 2(0) - 2(0) = 3 \rightarrow x = 3$ , artinya  $(3, 0, 0)$  titik pada bidang yang pertama. berdasarkan teorema di atas jarak titik tersebut terhadap bidang kedua adalah

$$d = \left| \frac{2(3) + 4(0) - 4(0) - 7}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} \right| = \left| \frac{-1}{\sqrt{36}} \right| = \frac{1}{6} \approx 0.1667.$$