UNIVERSITAS TERBUKA

01

TeOReMa

Temu Online Bareng Seputar Matematika

SERI ALJABAR LINIER ELEMENTER I (MATA4112)

MATRIKS, OPERASI BARIS, DAN MATRIKS ESELON

MATRIKS

APA ITU MATRIKS?

Matriks: bilangan-bilangan yang tersusun secara baris dan kolom

Bentuk Umum:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ukuran: $m \times n$ menyatakan bahwa banyak baris adalah m dan banyaknya kolom adalah n

APA ITU MATRIKS?

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 100 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{2} \\ -0.8 & \pi \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2 \\ 1 - 2i \end{bmatrix}$$

A berukuran 2×3; B berukuran 2×2;

C berukuran 1×3; B berukuran 2×1;

JENIS MATRIKS

Matriks Baris: Matriks yang banyak barisnya adalah 1

Matriks Kolom: Matriks yang banyak kolomnya adalah 1

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} a + 2b \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

JENIS MATRIKS

Matriks Persegi: Matriks yang banyak baris dan kolomnya adalah sama

Jika berukuran $n \times n$ maka disebut matriks persegi berorde n

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

JENIS MATRIKS: MATRIKS PERSEGI

Matriks Segitiga Atas: matriks persegi yang setiap unsur di bawah unsur diagonalnya adalah 0

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

JENIS MATRIKS: MATRIKS PERSEGI

Matriks Segitiga Bawah: matriks persegi yang setiap unsur di atas unsur diagonalnya adalah 0

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

JENIS MATRIKS: MATRIKS PERSEGI

Matriks Diagonal: matriks persegi yang setiap unsur selain unsur diagonalnya adalah 0

Contoh:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{D}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{D}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

UNIVERSITAS TERBUKA

JENIS MATRIKS: MATRIKS PERSEGI

Matriks Satuan (Identitas): matriks diagonal yang setiap unsur diagonalnya adalah 1

Contoh:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

OPERASI MATRIKS: PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN

Aturan:

- Dua buah matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila memiliki ukuran yang sama
- Jumlahkan setiap unsur masing-masing matriks yang terletak pada baris dan kolom yang sama

OPERASI MATRIKS: PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 100 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 3 & -99 & -9 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{2} \\ -0.8 & \pi \end{bmatrix}$$

OPERASI MATRIKS: TRANSPOS

Misalkan A matriks berukuran $m \times n$, maka transpos dari A adalah matriks A^T berukuran $n \times m$ dengan aturan:

- Menukarkan setiap unsur pada entri a_{ij} dengan a_{ji}

OPERASI MATRIKS: TRANSPOS

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 100 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{2} \\ -0.8 & \pi \end{bmatrix}$$

OPERASI MATRIKS: PERKALIAN SKALAR

Merupakan perkalian antara bilangan skalar dengan matriks yaitu

Jika

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Maka

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

OPERASI MATRIKS: PERKALIAN SKALAR

Contoh:

OPERASI MATRIKS: PERKALIAN

Aturan:

- Dua buah matriks dapat dikalikan jika banyak kolom matriks pertama sama dengan banyak baris matriks ke dua, yaitu AB terdefinisi jika A berukuran $m \times n$ dan B berukuran $n \times r$

- Hasil matriks AB berukuran $m \times r$

OPERASI MATRIKS: PERKALIAN

Contoh:

OPERASI MATRIKS: ~~PEMBAGIAN~~ INVERS

Misalkan

$$2x = 8$$
$$\rightarrow \quad \frac{2}{2}x = \frac{8}{2}$$
$$x = 4$$

Bagaimana jika

$$AX = B?$$

Maka diperlukan invers dari matriks A yaitu A^{-1} agar

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

OPERASI MATRIKS: INVERS

Misalkan

$$2x = 8$$

$$\rightarrow \quad \frac{2}{2}x = \frac{8}{2}$$

$$x = 4$$

Bagaimana jika

$$AX = B?$$

Maka diperlukan invers dari matriks A yaitu A^{-1} agar

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

OPERASI MATRIKS: INVERS

Secara umum, invers dari matriks A adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ adj(A)$$

Untuk matriks berukuran 2×2

Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

OPERASI MATRIKS: INVERS

Contoh

OPERASI BARIS ELEMENTER

SISTEM PERSAMAAN LINIER DAN MATRIKS YANG DIPERBESAR

Misalkan diberikan Sistem Persamaan Linier:

$$\boxed{2x - y = -5}$$
$$\boxed{-3x + 2y = 4}$$

Maka matriks yang diperbesarnya adalah

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Misalkan diberikan Sistem Persamaan Linier:

$$2x - y + z = -5$$

$$-3x + 2y = 4$$

$$2y - 2z = 1$$

Maka matriks yang diperbesarnya adalah

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -5 \\ -3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

OPERASI BARIS ELEMENTER (OBE)

Mengalikan suatu baris dengan bilangan tak nol:

Contoh 1:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{3B_1} \begin{bmatrix} 6 & -3 & -15 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = Q$$

Contoh 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}B_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Contoh 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}B_2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

OPERASI BARIS ELEMENTER (OBE)

Menambahi suatu baris dengan kelipatan baris lainnya:

Contoh 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} B_1 + B_2 \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Contoh 2:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}_{B_2 + 2B_1} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh 3:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}_{B_2 - \frac{1}{3}B_1} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{-5}{3} \end{bmatrix}$$

OPERASI BARIS ELEMENTER (OBE)

Menukar tempat antar dua baris:

Contoh 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 \leftrightarrow B_2} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Contoh 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_2 \leftrightarrow B_1]{} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

METODE ELIMINASI "=" OBE

Diberikan SPL dan Matriks yang diperbesarnya berikut :

$$\begin{aligned} 2x - y &= -5 \\ -3x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Metode Eliminasi	OBE
3P1 : $6x - 3y = -15$ 2P2 : $\underline{-6x + 4y = \quad 8 \quad +}$ $0x + \quad y = -7$ $y = -7$	$\begin{array}{c} 3B_1 \\ 2B_2 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -3 & -15 \\ -6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ $B_2 + B_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -3 & -15 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ Dari baris 2, maka $0x + y = -7$ $y = -7$

UNIVERSITAS TERBUKA

ELIMINASI GAUSS

Misalkan diberikan matriks dari SPL:

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & -1 & 1 & -5 \\ -3 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1/2)B_1 \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -5/2 \\ \boxed{-3} & 2 & 0 & 4 \\ \boxed{2} & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ B_2 + 3B_1 \\ B_3 - 2B_1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & \boxed{-1/2} & 3/2 & -7/2 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{-3} & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ -2B_2 \\ (-1/3)B_2 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ELIMINASI GAUSS

Dari matriks yang dihasilkan, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh SPL baru:

$$x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{5}{2}$$
$$y + 3z = -7$$
$$z = 2$$

Masukkan $z = 2$ ke P2:

$$y + 6 = -7 \quad \text{maka} \quad y = -13$$

Masukkan $y = -13$ dan $z = 2$ ke P1:

$$x + \frac{13}{2} - \frac{2}{2} = -\frac{5}{2} \quad \text{maka} \quad y = -8$$

UNIVERSITAS TERBUKA

ELIMINASI GAUSS-JORDAN

Misalkan diberikan matriks dari SPL:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -5 \\ -3 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textit{Eliminasi Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & \boxed{-1/2} & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Lanjutkan proses:

$$\xrightarrow{B_1 + (1/2)B_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} B_1 - 2B_3 \\ B_2 - 3B_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ELIMINASI GAUSS

Dari matriks yang dihasilkan, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh SPL baru:

$$x = -8$$
$$y = -13$$
$$z = 2$$

Matriks Eselon

Dari matriks yang dihasilkan eliminasi Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

merupakan matriks eselon

Jika kita lakukan OBE kembali:

$$B_1 + (1/2)B_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tetap merupakan matriks eselon

Matriks Eselon

Contoh lain matriks eselon:

$$P = \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{5}{3} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks Eselon Tereduksi

Dari matriks yang dihasilkan eliminasi Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

merupakan matriks eselon tereduksi.

Contoh lain matriks eselon tereduksi:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$