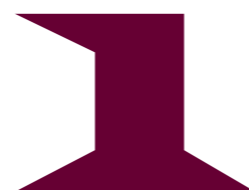




KALKULUS I

(MATA4110)

Himpunan dan Sistem Bilangan Real



Warsito

PROGRAM STUDI MATEMATIKA – FST UT

Kompetensi

Umum: 1. mengoperasikan himpunan; dan
2. menjelaskan sistem bilangan real.

Khusus:

- a. menjelaskan pengertian himpunan;
- b. menyajikan himpunan dengan cara mendaftarkan anggota dan menyatakan sifat anggotanya;
- c. mengoperasi himpunan yaitu gabungan, irisan, dan selisih;
- d. mendeskripsikan sistem bilangan real;
- e. menjelaskan sistem bilangan real;
- f. mencari himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan; dan
- g. mencari himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan nilai mutlak.

Definisi:

Himpunan adalah suatu daftar, koleksi, **objek** yang mempunyai **sifat tertentu**.

Daftar, koleksi, atau obyek disebut **anggota** atau **unsur himpunan**.

Himpunan diberikan notasi huruf besar: A, B, C, \dots, X , sedangkan **anggota** huruf kecil: a, b, c, \dots, x .

Pada kalkulus, yang dimaksud **obyek** adalah **bilangan real** dan **sifat tertentu** adalah **sistem bilangan real** R .

Himpunan disajikan dengan cara **mendaftarkan** anggota-anggotanya atau **menyebutkan sifat-sifatnya**.

Misalkan:

A himpunan bilangan asli yang lebih kecil dari 10.

a. **mendaftarkan** anggota-anggotanya: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b. **menyebutkan sifat-sifat** anggotanya: $A = \{x \mid x \text{ bilangan asli lebih kecil } 10\}$

B himpunan bilangan genap.

a. **mendaftarkan** anggota-anggotanya: $B = \{2, 4, 6, \dots\}$

b. **menyebutkan sifat-sifatnya**: $B = \{a \mid a \text{ bilangan genap}\}$

Jika x anggota A ditulis $x \in A$, dan jika x bukan anggota A ditulis $x \notin A$.

Misalkan: $A = \{1, 3, 5\}$, maka $3 \in A$ dan $2 \notin A$.

Himpunan

Definisi: (Dua Himpunan Sama)

Himpunan A dikatakan **sama** dengan himpunan B dan ditulis $A = B$, jika setiap anggota himpunan A juga anggota himpunan B dan setiap anggota himpunan B juga anggota himpunan A .

Misalkan: $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{5, 1, 3\}$, dan $C = \{1, 5, 7\}$. Maka $A = B$, $A \neq C$, dan $B \neq C$.

Definisi: (Himpunan Bagian)

Himpunan A disebut **himpunan bagian** dari himpunan B ditulis $A \subset B$, jika setiap anggota A juga merupakan anggota B .

Misalkan: $A = \{1, 3, 5\}$ dan $B = \{5, 1, 3, 4\}$, maka $A \subset B$.

Himpunan

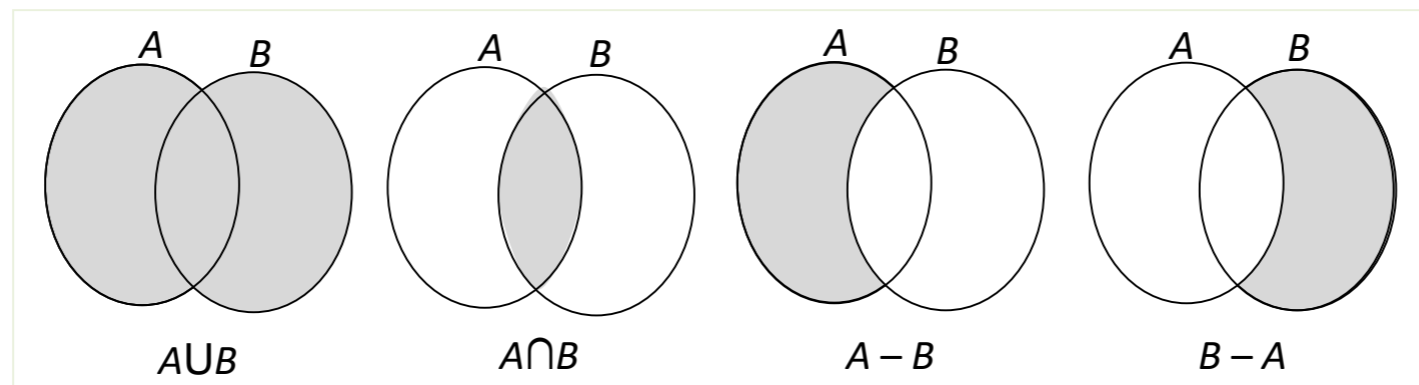
Definisi: (operasi Himpunan)

Ada 3 operasi himpunan yang akan dibahas yaitu **gabungan** (\cup), **irisan** (\cap), dan **selisih** ($-$).
Dari 3 operasi tersebut yang akan sering digunakan **gabungan** (\cup) dan **irisan** (\cap).

Gabungan himpunan A dan B adalah himpunan semua obyek yang menjadi anggota A dan B atau keduanya, dan ditulis dengan lambang $A \cup B$.

Irisan himpunan A dan B adalah himpunan semua obyek yang sekaligus menjadi anggota A dan B , dan ditulis dengan lambang $A \cap B$.

Selisih himpunan A dan B adalah himpunan semua obyek yang menjadi anggota A tetapi tidak menjadi anggota B , dan ditulis dengan lambang $A - B$.



Contoh 1.

Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, dan $C = \{4, 6, 8, 9\}$.

Tentukan: a. $A \cup B$; b. $B \cap C$; c. $A - B$;
d. $B - A$; e. $(A \cap B) \cup C$; f. $A \cap (B \cup C)$

Jawab:

a. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

b. $B \cap C = \{4, 5, 6, 7\} \cap \{4, 6, 8, 9\} = \{4, 6\}$.

c. $A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3\}$.

d. $B - A = \{4, 5, 6, 7\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 7\}$.

e. $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{4, 5, 6, 7\} = \{4, 5\}$,

$$(A \cap B) \cup C = \{4, 5\} \cup \{4, 6, 8, 9\} = \{4, 5, 6, 8, 9\}.$$

f. $B \cup C = \{4, 5, 6, 7\} \cup \{4, 6, 8, 9\} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

$$A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{4, 5\}.$$

Contoh 2.

Jika diketahui $A = \{x \mid x + 1 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + x - 2 = 0\}$, dan $C = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$.

Tentukan: a. $(A \cup B) \cap C$; b. $A \cup (B \cap C)$; c. $(C - A) \cap B$

Jawab:

$$A = \{x \mid x + 1 = 0\} = \{x \mid x = -1\} = \{-1\}.$$

$$B = \{x \mid x^2 + x - 2 = 0\} = \{x \mid (x - 1)(x + 2) = 0\} = \{x \mid x_1 = 1, x_2 = -2\} = \{-2, 1\}.$$

$$C = \{x \mid x^2 - 1 = 0\} = \{x \mid (x + 1)(x - 1) = 0\} = \{x \mid x_1 = -1, x_2 = 1\} = \{-1, 1\}.$$

a. $A \cup B = \{-1\} \cup \{-2, 1\} = \{-2, -1, 1\},$

$$(A \cup B) \cap C = \{-2, -1, 1\} \cap \{-1, 1\} = \{-1, 1\}.$$

b. $B \cap C = \{-2, 1\} \cap \{-1, 1\} = \{1\},$

$$A \cup (B \cap C) = \{-1\} \cup \{1\} = \{-1, 1\}.$$

c. $C - A = \{-1, 1\} - \{-1\} = \{1\},$

$$(C - A) \cap B = \{1\} \cap \{-2, 1\} = \{1\}.$$

Sistem Bilangan Real

Field (lapangan) Bilangan Real

Himpunan bilangan real \mathbb{R} (R) dengan operasi **penambahan** (+) dan **pengalian** (.) memenuhi **hukum-hukum** berikut:

1.1: Jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka terdapat dengan tunggal bilangan real c dan d sedemikian hingga $a + b = c$ dan $ab = d$.

1.2: Jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka $a + b = b + a$ dan $ab = ba$.

1.3: Jika $a, b, c \in \mathbb{R}$, maka $a + (b + c) = (a + b) + c$ dan $a(bc) = (ab)c$.

1.4: Jika $a, b, c \in \mathbb{R}$, maka $a(b + c) = ab + ac$.

1.5: Terdapat dua bilangan real 0 dan 1 sedemikian hingga untuk setiap bilangan real a , $a + 0 = a$ dan $a.1 = a$.

(0 disebut **identitas penambahan** dan 1 disebut **identitas pengalian**)

1.6: Untuk setiap bilangan real a , terdapat suatu bilangan real b sedemikian hingga $a + b = 0$. Bilangan b ditulis dengan lambang $-a$ ($b = -a$ disebut **invers penambahan**).

1.7: Untuk setiap bilangan real a , kecuali 0 terdapat suatu bilangan real c sedemikian hingga $a.c = 1$. Bilangan c ditulis dengan lambang a^{-1} atau $\frac{1}{a}$ atau $1/a$ ($c = a^{-1}$ disebut **invers pengalian**).

Ke-7 hukum di atas disebut **aksioma field** (lapangan).

Operasi: - pengurangan adalah **penambahan dengan inversnya** $a - b = a + (-b)$, misal: $4 - 3 = 4 + (-3) = 1$.

- pembagian adalah **pengalian dengan inversnya** $\frac{a}{b} = a.b^{-1}$, misal: $\frac{8}{2} = 8.(2^{-1}) = 4$

Sistem Bilangan Real

Urutan:

Himpunan bilangan real dipisahkan oleh 0 menjadi **himpunan bilangan real negatif** (< 0) dan **himpunan bilangan real positif** (> 0).



$$a < b \Leftrightarrow b - a \text{ positif } (b - a > 0).$$

Ekspresi $a < b$ (a lebih kecil b) berarti sama dengan $b > a$ (b lebih besar a).

Misalkan: a. $3 < 7 \Leftrightarrow 7 - 3 = 4 > 0$

b. $-8 < -5 \Leftrightarrow (-5) - (-8) = -5 + 8 = 3 > 0$

Hukum 1.8 Aksioma Urutan:

- Untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ (\mathbb{R}), berlaku tepat satu di antara tiga pernyataan berikut:
 $a = 0$, a positif atau $-a$ positif.
- Jumlah dua bilangan positif adalah positif.
- Hasil kali dua bilangan positif adalah positif.

Bentuk lain dari ekspresi 1.8.a: Jika a dan b bilangan real, maka hanya akan berlaku salah satu dari 3 kemungkinan: $a < b$, $a = b$, atau $a > b$.

Sistem Bilangan Real

Hukum 1.9 [Sifat-sifat Ketidaksamaan]

- 1.10. $a > 0$ jika dan hanya jika a positif,
 $a < 0$ jika dan hanya jika a negatif,
 $a > 0$ jika dan hanya jika $-a < 0$,
 $a < 0$ jika dan hanya jika $-a > 0$.
- 1.11. Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$.
- 1.12. Jika $a < b$, maka $a + c < b + c$ untuk setiap c .
- 1.13. Jika $a < b$ dan $c < d$, maka $a + c < b + d$.
- 1.14. Jika $a < b$ dan c positif, maka $ac < bc$.
- 1.15. Jika $a < b$ dan c negatif, maka $ac > bc$.
- 1.16. Jika $0 < a < b$ dan $0 < c < d$, maka $ac < bd$.

Ilustrasi 1.14 dan 1.15:

Misalkan $a = 2$, $b = 5$, $c = 3$, $d = -4$ maka:

4.a: $2 < 5 \Leftrightarrow 2(3) < 5(3) \Leftrightarrow 6 < 15$
4.b: $2 < 5 \Leftrightarrow 2(-4) > 5(-4) \Leftrightarrow -8 > -20$

Sistem Bilangan Real

HUKUM/AKSIOMA KELENGKAPAN

Setiap himpunan bilangan real yang mempunyai **batas bawah**, mempunyai **batas bawah terbesar**. Demikian juga, setiap himpunan bilangan real yang mempunyai **batas atas**, mempunyai **batas atas terkecil**.

SISTEM BILANGAN REAL

Himpunan semua bilangan real \mathbb{R} dengan **aksioma field**, **aksioma urutan** dan **aksioma kelengkapan**, secara lengkap mendeskripsikan **sistem bilangan real**.

SELANG ATAU INTERVAL

Selang terbuka dari a ke b , ditulis (a, b) , didefinisikan dengan: $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ [di sini $a, b \notin A$]

Selang tertutup dari a ke b , ditulis $[a, b]$, didefinisikan dengan: $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ [di sini $a, b \in A$]

Selang **setengah terbuka** atau **setengah tertutup**: $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ dan $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$.

Pertidaksamaan (Pertaksamaan)

Ketidaksamaan dan Pertidaksamaan

$3 < 4$, $2 \leq 5$, $10 > 6$, atau $6 \geq 4$: ketidaksamaan pernyataan bilangan-bilangan yang memuat tanda $<$, \leq , $>$, atau \geq .

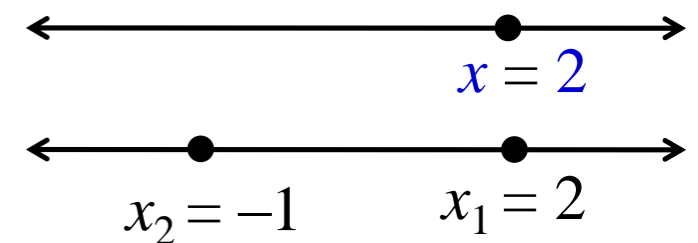
$3x < 4$, $2 < 2y = 10$, atau $4z > 6$: pertidaksamaan adalah ketidaksamaan yang memuat variabel.

Persamaan dan Pertidaksamaan

Persamaan: a. $2x = 4$ maka $x = \frac{4}{2} = 2$

b. $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$ dan $x_2 = -1$.

Nilai variabel persamaan berupa titik



Pertidaksamaan: a. $2x < 4$;

b. $2x \geq 4$

c. $x^2 - x - 2 \geq 0$;

d. $\frac{x+2}{x-1} < 2$

adalah yang akan dibahas berikut ini.

Masalah yang dihadapi dalam pertidaksamaan adalah menentukan/mencari nilai yang memenuhi pertidaksamaan.

Pertidaksamaan

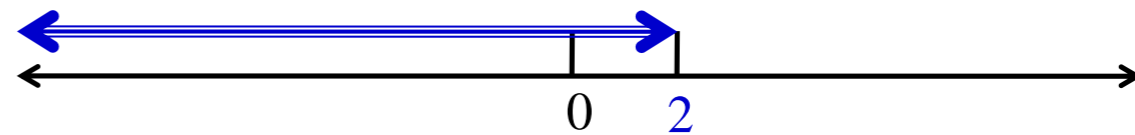
Contoh 3

Tentukan nilai x yang memenuhi: a. $2x < 4$; b. $2x + 4 \geq 0$

Jawab:

a. $2x < 4$ (kalikan $\frac{1}{2}$, sifat 1.14)

$$x < 2 .$$



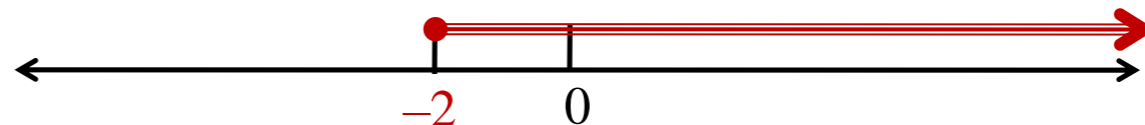
Jadi himpunan x yang memenuhi $2x < 4$ adalah $\{x \mid x < 2\}$ atau $(-\infty, 2)$.

b. $2x + 4 \geq 0$ (kedua ruas ditambah -4 , sifat 1.12)

$$2x + 4 - 4 \geq 0 - 4$$

$$2x \geq -4 \quad (\text{kalikan } \frac{1}{2}, \text{ sifat 1.14})$$

$$x \geq -2$$



Jadi himpunan x yang memenuhi $2x + 4 \geq 0$ adalah $\{x \mid x \geq -2\}$ atau $[-2, \infty)$.

Nilai variabel pertidaksamaan berupa selang (ingat, dalam persamaan berupa titik)

Pertidaksamaan

Contoh 4. Tentukan x yang memenuhi $2x + 4 < 4x - 2$

Jawab:

$$2x + 4 < 4x - 2 \quad (\text{ditambah } -4x)$$

$$-2x + 4 < -2 \quad (\text{ditambah } -4)$$

$$-2x < -6 \quad (\text{dikalikan } \frac{1}{2})$$

$$-x < -3 \quad (\text{dikalikan } -1)$$

$$x > 3.$$

Jadi, x yang memenuhi $2x + 4 < 4x - 2$ adalah $\{x \mid x > 3\}$ atau $(3, \infty)$.

Contoh 5. Tentukan x yang memenuhi $-1 < 2x + 3 \leq 9$.

Jawab:

$$-1 < 2x + 3 \leq 9$$

$$-4 < 2x \leq 6$$

$$-2 < x \leq 3$$

Jadi, x yang memenuhi $-1 < 2x + 3 \leq 9$ adalah $\{x \mid -2 < x \leq 3\}$ atau $(-2, 3]$.

Pertidaksamaan

Contoh 6. Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan: $\frac{(x+1)}{(x-3)} > 0$.

Jawab:

$$\frac{(x+1)}{(x-3)} > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) > 0$$

titik pemecah $x_1 = -1$ dan $x_2 = 3$



Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan adalah daerah bertanda **positif (+)**, yaitu:

$$x = \{x < -1 \cup x > 3\}.$$

Nilai Mutlak

Definisi:

Nilai mutlak suatu bilangan real x ditulis dengan tanda $|x|$, didefinisikan sebagai:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0 \\ -x, & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

misalkan: a. $|5| = 5$; b. $|-3| = -(-3) = 3$; c. $|0| = 0$.

Sifat-sifat:

1. $|a| \geq a$, $|a| = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$
2. $|ab| = |a| \cdot |b|$
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$
5. $|a - b| \geq |a| - |b|$; $|a - b| \geq -|a| + |b|$

Teorema:

Jika $a > 0$, maka:

1. $|x| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$.
2. $|x| \leq a$ jika dan hanya jika $-a \leq x \leq a$.
3. $|x| > a$ jika dan hanya jika $x > a$ atau $x < -a$.
4. $|x| \geq a$ jika dan hanya jika $x \geq a$ atau $x \leq -a$.

Nilai Mutlak

Contoh 7. Tentukan x yang memenuhi $|2x - 3| \leq 5$.

Jawab:

$$|2x - 3| \leq 5$$

$$-5 \leq 2x - 3 \leq 5$$

$$-2 \leq 2x \leq 8$$

$$-1 \leq x \leq 4 \text{ atau } [-1,4].$$

Contoh 8. Tentukan x yang memenuhi $|3x + 2| > 5$.

Jawab:

$$|3x + 2| > 5$$

$$3x + 2 < -5 \text{ atau } 3x + 2 > 5$$

$$3x < -7 \text{ atau } 3x > 3$$

$$x < -\frac{7}{3} \text{ atau } x > 1 \text{ atau } (-\infty, -\frac{7}{3}) \cup (1, \infty).$$

Penutup

Pembahasan materi Inisiasi 1 ini hanya sebagian dari materi Himpunan dan Sistem Bilangan Real. Oleh karena itu, dalam kesempatan lain, mahasiswa masih dituntut untuk mempelajari bagian atau referensi lain yang berkaitan dengan bahasan Inisiasi 1 ini.

Semoga Sukses!



UNIVERSITAS TERBUKA

Terima Kasih

2020