K A L K U L U S I

(MATA4110)

Turunan (Derivatif) Fungsi

4

Warsito

PROGRAM STUDI MATEMATIKA – FST UT

UNIVERSITAS TERBUKA

Kompetensi

Umum: Menentukan derivatif (turunan) fungsi.

Khusus:

a. menjelaskan definisi derivatif suatu fungsi;
b. menghitung derivatif fungsi di suatu titik dengan menggunakan definisi derivatif;
c. mencari derivatif fungsi di suatu selang dengan menggunakan definisi derivatif;
d. membuktikan rumus-rumus sederhana derivatif;
e. menjelaskan hubungan antara keterdiferensialan dan kekontinuan fungsi di suatu titik;
f. mencari derivatif dari jumlah, selisih, hasil kali, dan hasil bagi dua fungsi;
g. mencari gradien dan menentukan persamaan garis singgung pada suatu kurva;
h. mencari gradien dan persamaan garis normal pada suatu kurva; dan
i. mencari kecepatan sesaat suatu benda yang bergerak lurus.

Prasyarat

Untuk menentukan derivatif fungsi, diperlukan penguasaan materi fungsi, limit fungsi, dan kekontinuan fungsi .

Ada 2 cara menentukan derivatif, yaitu dengan menggunakan definisi dan menggunkan rumus-rumus. Pada awalnya mahasiswa dituntut dapat menentukan derivatiif dengan menggunakan definsi (terutama mahasiswa Matematika), setelah itu akan lebih banyak menggunakan rumus-rumus.

Definisi Derivatif (Turunan)

- Istilah lain dari derivatif adalah turunan.
- Ada 2 pengertian yang penting dalam definisi derivatif, yaitu derivatif pada
  titik dan derivatif pada selang

DERIVATIF DI SUATU TITIK

Derivatif $f(x)$ di titik $x = x_0$ diberi notasi $f'(x_0)$ atau $\frac{df(x_0)}{dx}$ dan didefnisikan sebagai:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$, jika nilai limitnya ada.

DERIVATIF DI SUATU SELANG

Derivatif $f(x)$ di selang I $(x \in I)$ diberi notasi $f'(x)$ atau $\frac{df(x)}{dx}$ dan didefinisikan sebagai:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$, jika nilai limitnya ada.

Contoh turunan (derivatif) di suatu titik

Contoh 1. Tentukan $f'(5)$ (derivatif f di titik $x = 5$) dari $f(x) = x^2 + 1$

Jawab:

$$f'(5) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(5 + \Delta x) - f(5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{(5 + \Delta x)^2 + 1\} - (5^2 + 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{25 + 10.\Delta x + (\Delta x)^2 + 1\} - (25 + 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10.\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (10 + \Delta x)$$

$$= 10.$$

Contoh derivatif di suatu titik

Contoh 2. Tentukan $g'(\frac{\pi}{4})$ dari $g(t) = \sin t$.

Jawab:

$$g\left(\frac{\pi}{4}+\Delta t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\Delta t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\Delta t + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\Delta t = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cos\Delta t + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sin\Delta t$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

Jadi, $g'(\frac{\pi}{4}) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{g\left(\frac{\pi}{4}+\Delta t\right) - g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\left\{\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos\Delta t + \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\Delta t\right\} - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\Delta t}$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}(\cos\Delta t - 1) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\sin\Delta t\right)}{\Delta t}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\cos\Delta t - 1)}{\Delta t} + \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right).0 + \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right).1$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

Contoh derivatif [turunan] di suatu selang

Contoh 3. Tentukan $f'(x)$ dari $f(x) = x^2 + 1$

Jawab:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{(x+\Delta x)^2 + 1\} - (x^2 + 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{x^2 + 2.x.\Delta x + (\Delta x)^2 + 1\} - (x^2 + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x.\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$$

$$= 2x.$$

Contoh 4 Tentukan $f'(x)$ dari $f(x) = \ln x$

Jawab:

$$f(x + \Delta x) = \ln(x + \Delta x) \text{ dan } f(x) = \ln x$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \ln\left(1 + \tfrac{\Delta x}{x}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} . \left(\frac{x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} . \left(\frac{1}{x}\right) = 1 . \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

langkah ini agak sulit, memerlukan ketajaman intuisi, yaitu dikalikan 1 dalam bentuk $\frac{x}{x}$

Rumus Dasar Derivatif [Turunan]

Pada kenyataannya menentukan derivatif dengan menggunakan definisi sangat sukar dan memerlukan waktu. Untuk itu, setelah Kegiatan Belajar 1 Modul 5, lebih banyak digunakan rumus-rumus untuk menentukan derivatif. Khusus mahasiswa matematika dituntut dapat membuktikan rurmus-rumus yang sederhana. Tabel sebelah kanan rumus-rumus derivatif yang dambilkan dari BMP Kalkulus I/MATA4110 halaman 5.10. Selain rumus dasar, juga diberikan rumus (aljabar) derivatif di bawah ini.

Rumus (aljabar) derivatif :

1. $\frac{d}{dx}\left(f(x)\pm g(x)\right)=f'(x)\pm g'(x)$
2. $\frac{d}{dx}\left(k\,f(x)\right)=k\,f'(x)$
3. $\frac{d}{dx}\left(f(x).g(x)\right)=f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$
4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\,f'(x)-f(x)\,g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

Tabel 5.1.1 Rumus-rumus Turunan Fungsi Sederhana

No.	$f(x)$	$f'(x)$
1.	k (konstanta)	0
2.	a. x^n, $n\in N$ b. x^α, $\alpha\in R$	a. nx^{n-1} b. $\alpha x^{\alpha-1}$
3.	$\sin x$	$\cos x$
4.	$\cos x$	$-\sin x$
5.	$\tan x$	$\sec^2 x$
6.	$\cot x$	$-\csc^2 x$
7. 8.	$\sec x$ $\csc x$	$\sec x\,.\tan x$ $-\csc x\,.\cot x$
9.	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
10.	e^x	e^x
11.	a^x ; $(a>0, a\neq 1)$	$a^x \ln a$
12.	$\sin^{-1} x$; $-1<x<1$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ [Purcell,399]
13.	$\cos^{-1} x$; $-1<x<1$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
14.	$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
15.	$\sec^{-1} x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
16.	$\sinh x$	$\cosh x$
17.	$\cosh x$	$\sinh x$
18.	$\tanh x$	$\operatorname{sech}^2 x$
19.	$\coth x$	$-\operatorname{csch}^2 x$
20.	$\operatorname{sech} x$	$-\operatorname{sech} x\ \tanh x$
21.	$\operatorname{csch} x$	$-\operatorname{csch} x\ \coth x$

Rumus Dasar Derivatif [Turunan]

Contoh 5.

Diketahui: a. $f(x) = 2x + \sinh x - 3\tan x$; b. $f(x) = xe^x$; c. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x}$

tentukan $f'(x)$ dengan menggunakan rumus-rumus derivatif.

Jawab:

a. $f'(x) = \dfrac{df}{dx} = 2\dfrac{d}{x}(x) + \dfrac{d}{x}(\sinh x) - 3\dfrac{d}{dx}(\tan x) = 2 + \cosh x - 3\sec^2 x$.

b. $f'(x) = \dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x).(e^x) + (x).\dfrac{d}{dx}(e^x) = 1.e^x + x.e^x = (1+x)e^x$.

c. $$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(x).(x^2 - x) - (x).\frac{d}{dx}(x^2 - x)}{(x^2 - x)^2} = \frac{(1).(x^2 - x) - (x)(2x - 1)}{(x^2 - x)^2}$$

$$= \frac{x^2}{(x^2 - x)^2}.$$

Terapan Derivatif – Garis singgung/normal

Garis Singgung

Jika $f(x)$ terdiferensial pada $x = x_0$ maka $f'(x_0)$ merupakan gradien garis singgung kurva $f(x)$ di titik singgung $M(x_0, f(x_0))$.

[kita ingat persamaan garis singgung dengan gradien m dan melalui titik (a,b), yaitu:

$$y - b = m(x - a)$$]

Jadi, persamaan garis singgung $f(x)$ di $x = x_0$ dapat ditulis sebagai:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).}$$

Terapan Derivatif – Garis singgung/normal

Contoh 4.

Tentukan persamaan garis singgung kurva $f(x) = x^2 - 1$

di $x_0 = 1$.

Jawab:

$f(x_0) = f(1) = (1)^2 - 1 = 0$,

sehingga persamaan garis singgung melalui titik $M(1, 0)$.

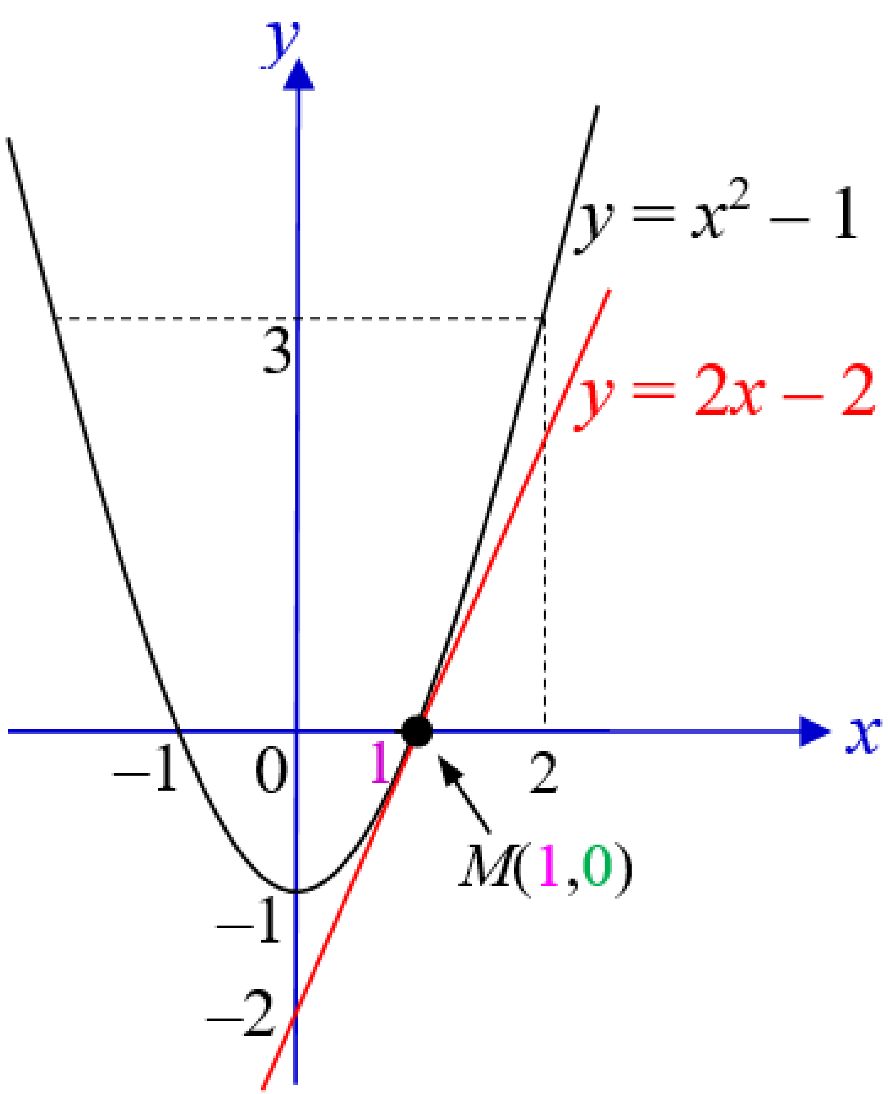
$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2(1) = 2$,

sehingga gradien garis singgung $f'(1) = 2$.

Jadi, persamaan garis singgung: $y - 0 = 2(x - 1)$

$$y = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 2 .$$



Terapan Derivatif – Garis singgung/normal

Contoh 5.

Carilah persamaan garis singgung pada kurva $y = x^2 - 4x + 3$ di titik $M_0(x_0, y_0)$ dengan $x_0 = -1$.

Jawab:

$f(x) = x^2 - 4x + 3$, sehingga $y_0 = f(x_0) = f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 3 = 8$,

jadi titik singgungnya adalah $M_0(-1, 8)$.

$f'(x) = 2x - 4$

Gradien garis singgung: $f'(x_0) = f'(-1) = 2(-1) - 4 = -6$.

Jadi persamaan garis singgung pada kurva $y = x^2 - 4x + 3$ di titik $M_0(-1, 8)$ adalah:

$y - 8 = -6(x - (-1)) = -6(x + 1) = -6x - 6$

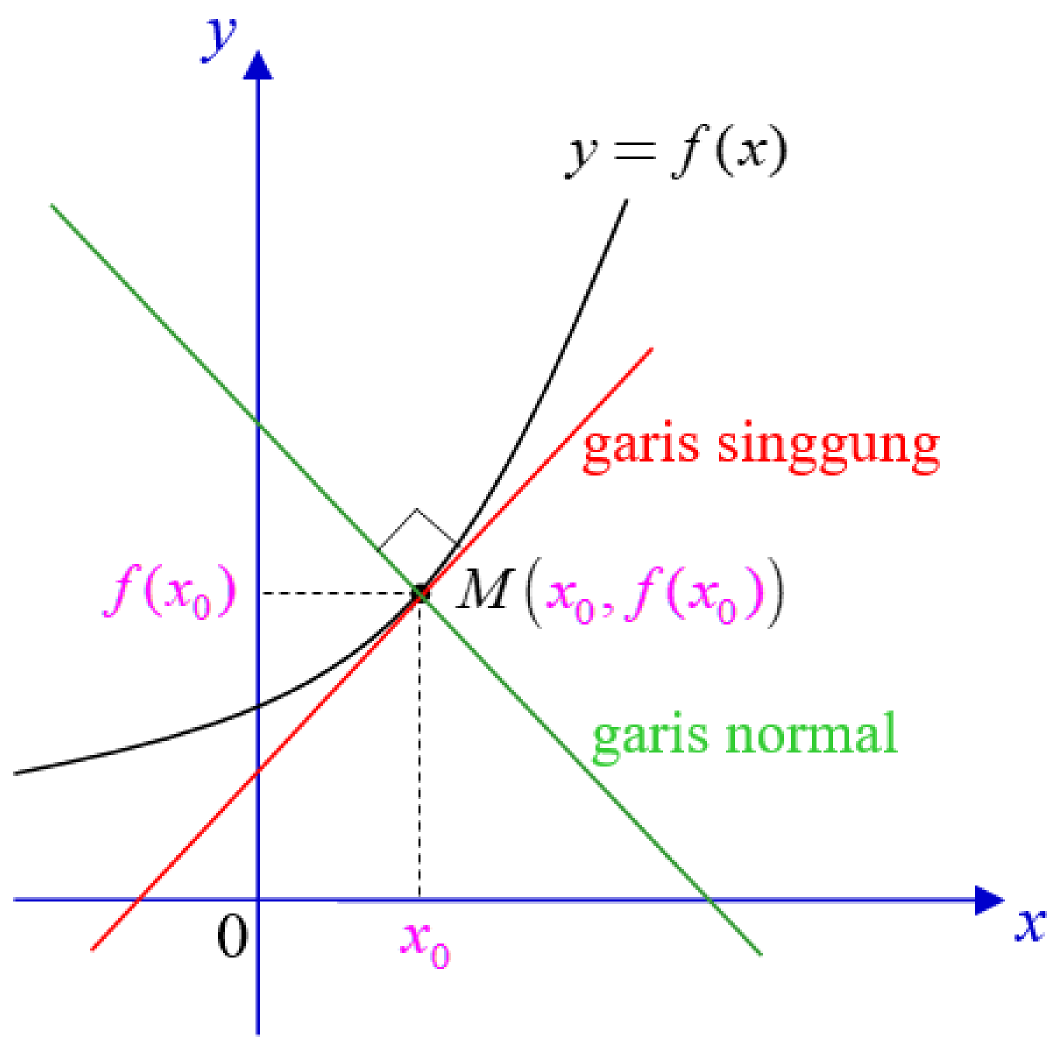
$y = -6x + 2$.

Terapan Derivatif – Garis Singgung/Normal

Garis Normal

Garis normal adalah garis yang **tegak lurus** dengan garis singgung. Hasil kali gradien dua garis yang saling tegak lurus adalah (-1), sehingga misalkan gradien garis pertama m_1 dan gradien garis kedua m_2 maka $m_1 m_2 = -1$ atau $m_2 = -\frac{1}{m_1}$. Jadi, jika gradien garis singgung di suatu titik adalah $f'(x_0)$ maka gradien garis normal $\left(m_2 = -\frac{1}{f'(x_0)}\right)$.

Perhatikan gambar di samping!



Terapan Derivatif – Garis Singgung/Normal

Contoh 6.

Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal pada kurva

$f(x) = -x^3 + 1$ di $x = -1$.

Jawab:

$f(x) = -x^3 + 1$, maka $f(-1) = -(-1)^3 + 1 = -(-1) + 1 = 2$.

sehingga garis singgung dan garis normal melalui $M(-1, 2)$.

$f'(x) = -3x^2$, maka gradien garis singgung

$f'(-1) = -3(-1)^2 = -3(1) = -3$.

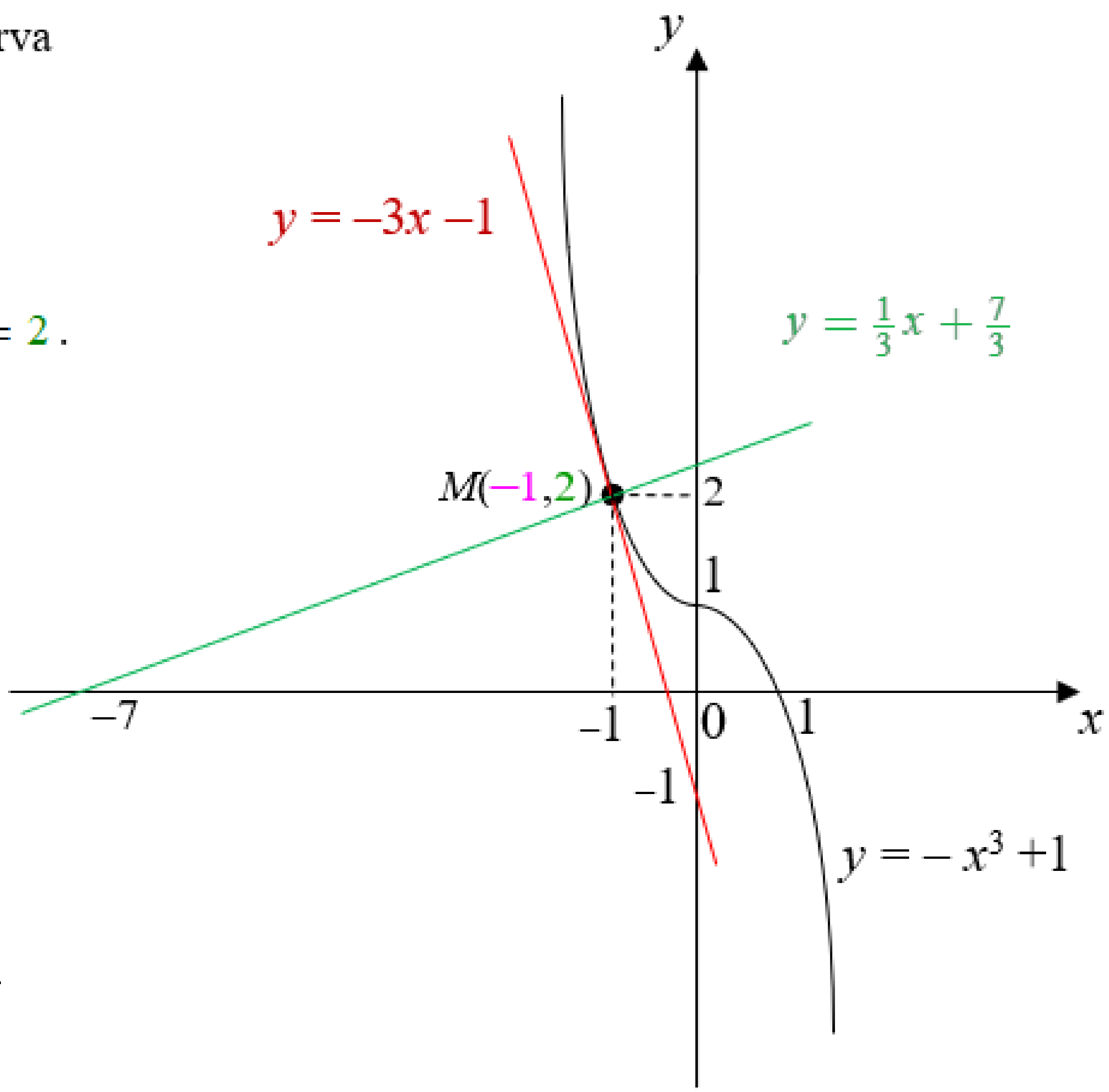
Persamaan garis singgung melalui $M(-1, 2)$, adalah:

$y - 2 = -3(x - (-1)) = -3x - 3$ atau $y = -3x - 1$.

Persamaan garis normal melalui $M(-1, 2)$, adalah:

$$y - 2 = \frac{1}{-(-3)}(x - (-1)) = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3} \Rightarrow y = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{7}{3}$$

atau $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.



Terapan Derivatif – Kecepatan Sesaat

Kecepatan Sesaat

Misalkan suatu partikel bergerak pada saat t dengan persamaaan $y = f(t)$. Pada saat $t = t_0$ nilai y adalah $y_0 = f(t_0)$. Pada selang waktu Δt, yaitu setelah t_0, nilai y adalah $y_0 + \Delta y = f(t_0 + \Delta t)$. Jadi kecepatan rata-rata perubahan y selama selang waktu Δt sejak saat t_0 adalah:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Dalam keadaan $\Delta t \to 0$, maka

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = f'(t_0)$$ [ini merupakan derivatif pertama $f(t)$ pada t_0]

Jadi, kecepatan sesaat $v(t) = f'(t)$ merupakan derivatif pertama persamaan gerak $y = f(t)$.

Terapan Derivatif – Kecepatan Sesaat

Contoh 7.

Sebuah partikel bergerak dengan dengan persamaan gerak $y = f(t) = t^2 - 2t + 3$.

a. tentukan kecepatan pada saat t.

b. tentukan kecepatan pada saat $t = 2$.

c. kapan partikel berhenti?

d. berapa jarak yang ditempuh ketika partkel berhenti?

Jawab:

a. kecepatan pada saat t adalah $v(t) = f'(t) = 2t - 2$.

b. kecepatan pada saat $t = 2$ adalah $f'(2) = 2(2) - 2 = 2$.

c. partikel berhenti, berarti kecepatan 0 sehingga $v(t) = 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$

jadi, partikel berhenti pada saat $t = 1$.

d. Saat partikel berhenti jarak yang ditempuh: $f(1) = (1)^2 - 2(1) + 3 = 2$.

Penutup

Pembahasan materi Inisiasi 4 ini hanya sebagian dari materi turunan (derivatif). Oleh karena itu, dalam kesempatan lain, mahasiswa masih dituntut untuk mempelajari bagian atau referensi lain yang berkaitan dengan bahasan materi Inisiasi 4.

Semoga Sukses!

UNIVERSITAS TERBUKA

Terima Kasih

2020